차 례

상식

머 리 말

위대한 령도자 **김정일**대원수님께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《수학은 모든 자연과학의 기초로 될뿐아니라 사회현상을 연구하는데서도 중요한 수단으로 됩니다. 수학교육을 강화하는것은 자라나는 새 세대들의 과학적인 사고능력을 키워주는데서 중요한 의의를 가집니다.》

지금으로부터 수천년전 수학에서는 주로 셈세기와 수계산, 간단한 도형의 면적계산과 같이 수와 도형에 대한 연구가 우세하였다.

그러나 16~17세기에 이르러 운동과 변화에 대한 연구를 목적으로 변수와 각종 초등함수들이 도입되고 그 성질들에 대한 연구가 심화되면서 천문학과 물리학, 화학, 생물학을 비롯한 자연과학분야에서는 여러가지 자연현상들과 법칙들을 연구하는데 함수가 적극 리용되게 되였다.

우리는 5학년에서 함수와 거꿀함수에 대한 일반적인 개념과 대표적인 초등함수들인 지수함수와 로그함수, 삼각함수에 대하여 학습하게 된다.

5학년에서는 또한 이미 4학년에서 배운 삼각비를 리용하여 3각형의 변과 각들사이의 관계식을 끌어내고 이를 리용한 각종 풀이법을 학습하게 된다.

또한 론리적사고능력을 키우는데 절실히 필요한 명제와 그 산법에 대하여 모임과의 련관속에서 학습하게 된다.

오늘날 수학은 자연계의 미시 및 거시현상들과 법칙들을 더 깊이 탐구하고 응용할수 있게 하며 현대사회의 다종다양한 정보들을 능숙하게 처리할수 있는 높은 사유능력을 소유할수 있게 하고있다.

우리는 수학학습을 더 열심히 하여 지식경제시대에 자기의 역할을 원만히 수행할수 있는 풍부한 지식과 능력을 소유하여야 한다.

제1장. 지수함수와 로그함수

제1절. 함수와 거꿀함수

1. 함수

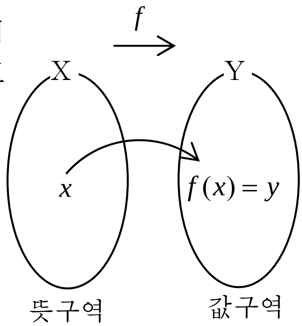
찾기 다음과 같이 대응규칙이 주어졌다. 꼭 하나의 수만을 대응시키는 규칙은 어느것인가?

1) f: 매개 자연수에 짝수를 대응시키는 규칙
2) g: 매개 자연수에 그 약수를 대응시키는 규칙
3) h: 매개 옹근수에 그 수를 4로 나눈 나머지를 대응시키는 규칙

X와 Y를 두 수모임이라고 하자.

어떤 규칙 f에 의하여 매개 수 $x\in X$에 Y의 꼭 하나의 수 y가 대응하면 이 규칙 f를 X를 Y로 보내는 **함수**라고 부르고 다음과 같이 표시한다.

$$f: X\to Y \text{ 또는 } X \xrightarrow{f} Y$$



그리고 함수 f에 의하여 $x\in X$에 $y\in Y$가 대응한다는것을

$$f(x)=y \text{ 또는 } f: x\to y$$

와 같이 표시하고 $f(x)$를 **함수값**, X를 함수 f의 **뜻구역**, 함수값전부의 모임 $\{f(x)\,|\,x\in X\}$를 f의 **값구역**이라고 부른다.

값구역 $\{f(x)\,|\,x\in X\}$은 일반적으로 Y의 부분이지만 앞으로 따로 말이 없으면 $\{f(x)\,|\,x\in X\}=Y$라고 보기로 한다.

표시 $f(x)=y$는 그 뜻으로 보아 규칙 f에 의하여 x에 y가 대응한다는것을 나타내는것과 함께 x에 대응하는 함수값 y를 나타내기도 한다. 그러므로 흔히 $f(x)$를 함수라고도 부른다.

함수의 의미에서 기본알맹이는 대응규칙과 뜻구역이다. 뜻구역과 대응규칙이 주어지면 함수는 주어졌다고 본다.

대응규칙과 뜻구역이 같은 함수는 같다고 본다.

찾기에서 규칙 f는 자연수모임을 뜻구역으로 하고 짝수들의 모임 {2, 4, 6, …}을 값구역으로 하는 함수이다.

또한 규칙 h는 옹근수모임 Z를 뜻구역으로 하고 {-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3}을 값구역으로 하는 함수이다.

$h(-5)=1$, $h(8)=0$, $h(10)=2$ 등

문 제

1. X={-3, -2, -1, 1, 2, 3}을 뜻구역으로 가지는 함수 $f: x \to \frac{24}{|x|}$의 값을 구하여 다음 표에 적어넣어라.

x	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4
$f(x)$								

1) 값구역을 구하여라.

2) 값구역의 매개 값은 뜻구역의 몇개의 값에 대응하는가?

2. 다음 식으로 표시되는 함수의 뜻구역은 어떤 수모임이여야 하는가?

1) $4-5x$　　2) $\frac{3}{x+2}$　　3) $\sqrt{4x-7}$

3. 다음 수모임을 뜻구역으로 가지는 함수 $f(x)=2-3x$의 값구역을 구하여라.

1) $\{-3, -2, 0, 2, \frac{2}{3}, 4\}$　　2) $[-7, 0]$

3) $[2, 100]$　　4) $(-\infty, 0]$　　5) $(-\infty, +\infty)$

4. 함수 $f(x)=x^2+1$과 $g(t)=t^2+1$은 같은 함수인가 또 다른 함수인가? 같은 함수라면 그 까닭을 말하여라.

2. 거꿀함수

알아보기 함수 $y=x^2$의 뜻구역은 $(-\infty, +\infty)$이고 값구역은 $[0, +\infty)$이다.

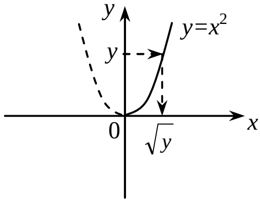
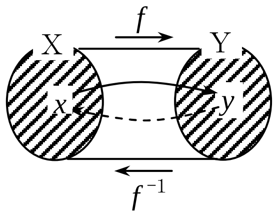


그림 1-1

1) 값구역의 매개 값은 뜻구역의 몇개의 값에 대응하는가?

2) 뜻구역을 $x>0$으로 제한하면 값구역의 매개 값 y에 $x^2=y(y>0)$에 맞는 x는 $x=\sqrt{y}$로 꼭 하나로 정해진다. 이것은 값구역을 뜻구역으로 하는 하나의 새로운 함수가 정해졌다는것을 의미한다.

> $y=f(x)$를 뜻구역이 X이고 값구역이 Y인 함수라고 하자.
>
> 매개 값 $y\in$Y에 조건
>
> $$f(x)=y$$
>
> 에 맞는 $x\in$X의 값이 꼭 하나 정해진다고 하면 이것은 Y→X인 하나의 새로운 함수가 정해졌다는것을 의미한다.
>
> 
>
>
> 이 함수를 함수 $y=f(x)$의 **거꿀함수**라고 부르고 다음과 같이 표시한다.
>
> $$x=f^{-1}(y)$$

정의에서 곧 알수 있는바와 같이 함수 f의 거꿀함수 f^{-1}는 독립변수와 종속변수의 역할을 바꾼 x와 y사이의 같은 관계를 나타낸다. 따라서 함수 f의 뜻구역은 거꿀함수 f^{-1}의 값구역으로 되고 그 값구역은 f^{-1}의 뜻구역으로 된다. 즉

$$y=f(x),\ x\in\mathrm{X} \Leftrightarrow x=f^{-1}(y),\ y\in\mathrm{Y}$$

이로부터 다음 늘갈기식이 성립한다.

$$f[\,f^{(-1)}(y)\,]=y,\quad f^{-1}[f(x)]=x$$

독립변수를 x, 종속변수를 y로 표시하는 관례에 따라 거꿀함수 $x=f^{-1}(y)$를 보통 $y=f^{-1}(x)$로 표시한다.

뜻구역은 $x>0$으로 제한한 $y=x^2$의 거꿀함수는

$$y=\sqrt{x}$$

이고 $x<0$으로 제한한 거꿀함수는

$$y=-\sqrt{x}$$

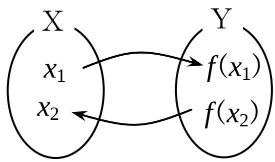
이다.

다음으로 함수 f의 거꿀함수가 있기 위한 조건을 밝혀보자.

f :X→Y라고 하자.

$x_1 \neq x_2 (x_1,\ x_2 \in \mathrm{X}) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

이면 함수 f는 거꿀함수를 가진다.



사실 $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$이라는데로부터 매개 $y \in \mathrm{Y}$에 $f(x)=y$에 맞는 $x \in \mathrm{X}$가 있다는것은 분명하다. 이러한 $x \in \mathrm{X}$가 꼭 하나라는것을 말하자. 만일 $x_1,\ x_2 \in \mathrm{X} (x_1 \neq x_2)$가 있어서 $f(x_1)=f(x_2)=y$라고 하면 이것은 조건 $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$에 맞지 않는다. 따라서 함수 f가 우의 조건에 맞으면 거꿀함수 f^{-1}가 있다.

례. 함수 $y=2x+3$은 거꿀함수를 가지는가?

(풀이) 이 함수의 뜻구역과 값구역은 실수전체의 모임 즉 $(-\infty,\ +\infty)$이다. 그런데 $x_1 \neq x_2 (x_1,\ x_2 \in \mathrm{X}) \Rightarrow f(x_1) = 2x_1+3 \neq 2x_2+3 = f(x_2)$이므로

함수 $y=2x+3$은 거꿀함수를 가진다.

매개 $y \in \mathrm{Y}$에 조건 $2x+3=y$에 맞는 $x \in \mathrm{X}$를 구하면

$$x=\frac{y-3}{2}$$

즉 주어진 함수의 거꿀함수는

$$y=f^{-1}(x)=\frac{x-3}{2},\quad x \in (-\infty,\ +\infty)$$

이 거꿀함수는 $y=2x+3$을 x에 관한 방정식으로 보고 x에 관하여 푼 식에서 x와 y를 바꾸어 쓴것이다.

일반적으로 $f(x)$가 x에 관한 식이고 함수 $y=f(x)$에 거꿀함수가 있을 때 거꿀함수 $y=f^{-1}(x)$는 다음과 같이 구한다.

$y=f(x) \longrightarrow x=f^{-1}(y) \longrightarrow y=f^{-1}(x)$
(x에 관하여 푼다.)　　(x와 y를 서로 바꾼다.)

문 제

1. 함수 $y=3x+2$에 대하여

1) 거꿀함수를 구하여라.

2) 먼저 x와 y를 서로 바꾸고 다음에 y에 관하여 풀어도 거꿀함수가 나오는가?

2. 조건 $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$는 x축에 평행인 아무런 직선이든지 함수 $f(x)$의 그라프와 두 점이상에서는 사귀지 않는다는 조건과 같은가 같지 않은가?

3. 다음 함수의 거꿀함수를 구하여라.

1) $y=x^3$　　2) $y=\dfrac{x+5}{3x-1}$ $(x \in [1,\ 10])$

3) $y=x^2-2x+1(x \geq 1)$　　4) $y=|x|\,(x \geq 0)$

4. 그라프가 다음과 같은 함수에 거꿀함수가 있는가 없는가?

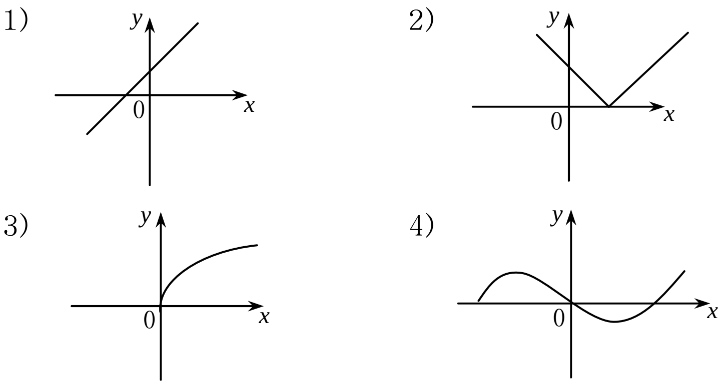


그림 1-2

5. 증가만 하거나 감소만 하는 함수에는 거꿀함수가 있다고 말할수 있는가?

해보기 다음 그림을 보고 직선 $y=x$에 관한 점 $P(a, b)$의 대칭점은 $Q(b, a)$라는것을 설명하여보아라.

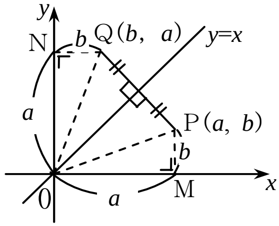


그림 1-3

점을 직선 $y=x$에 관하여 대칭이동하면 점의 x, y자리표는 서로 자리를 바꾼다.

함수 $y=f(x)$의 그라프를 G, G를 직선 $y=x$에 관하여 대칭이동한 곡선을 G′ 라고 하자.

$P(a, b)$를 G의 임의의 점이라고 하자.

그러면

$$b=f(a)\Leftrightarrow a=f^{-1}(b)$$

이것은 점 $Q(b, a)$가 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그라프의 점이라는것을 보여준다.

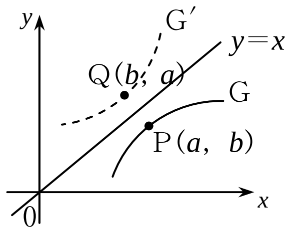


그림 1-4

그런데 점 $Q(b, a)$는 직선 $y=x$에 관한 점 $P(a, b)$의 대칭점이다.

이리하여

함수 $y=f(x)$의 그라프를 직선 $y=x$에 관하여 대칭이동하면 거꿀함수 $y=f^{-1}(x)$의 그라프를 얻는다.

함수 $y=\sqrt{x}$는 함수 $y=x^2(x\geq 0)$의 거꿀함수이고 함수 $y=\sqrt[3]{x}$는 함수 $y=x^3\,(x\geq 0)$의 거꿀함수이다. 그 그라프들은 직선 $y=x$에 관하여 각각 $y=x^2$과 $y=x^3$의 그라프와 대칭이다.

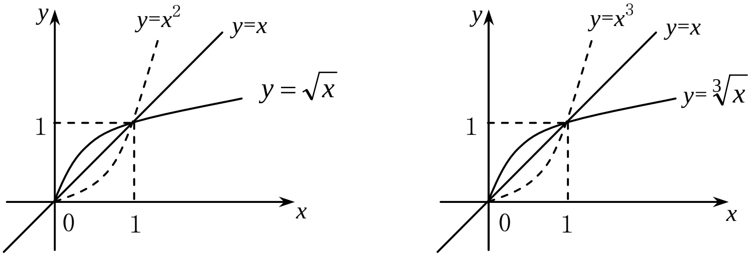


그림 1-5

문 제

1. 자리표평면에 직선 $y=x$에 관한 다음 점들의 대칭점들을 표시하여라.

A(-4, -3), B(0, 5), C(2, 5)

2. 다음 두 함수의 그라프는 직선 $y=x$에 관하여 대칭이다. 왜 그런가?

1) $y=2x-1$, $y=\dfrac{x+1}{2}$ 2) $y=\dfrac{2x-1}{5}$, $y=\dfrac{5x+1}{2}$

3. 다음 함수의 거꿀함수를 구하고 그라프를 그려라.

1) $y=\begin{cases} 2x-1, & x\in[-2,\ 0] \\ \dfrac{1}{2}x-1, & x\in(0,\ 2] \end{cases}$ 2) $y=\begin{cases} x^2, & x\in[0,\ +\infty) \\ -x^2, & x\in(-\infty,\ 0) \end{cases}$

3. 함수의 그라프변환

1) 평행이동

알아보기 1. 1) 함수 $y=x^2+5$ 의 그라프는 $y=x^2$ 의 그라프를 어떻게 이동하여 얻었는가?

2) $y=f(x)=x^2$ 일 때 함수 $y=x^2+5$ 를 $y=f(x)$ 에 관하여 표시하면 $y=f(x)+5$라고 말할수 있는가?

3) $y=f(x)+5$ 의 그라프는 $y=f(x)$ 의 그라프를 어떻게 이동하여 얻을수 있겠는가?

2. 1) 함수 $y=(x-2)^2$ 의 그라프는 $y=x^2$ 의 그라프를 어떻게 이동하여 얻었는가?

2) $y=f(x)=x^2$ 일 때 $y=(x-2)^2$ 을 $y=f(x)$ 에 관하여 표시하여라.

3) $y=f(x-2)$ 의 그라프는 $y=f(x)$ 의 그라프를 어떻게 이동하여 얻을수 있겠는가?

1. 함수 $y=f(x)+n$ 의 그라프는 $y=f(x)$ 의 그라프를 y 축의 정방향으로 n 만큼 평행이동하여 얻는다.
2. 함수 $y=f(x-m)$ 의 그라프는 $y=f(x)$ 의 그라프를 x 축의 정방향으로 m 만큼 평행이동하여 얻는다.

례 1. $y=\sqrt{x}+2$ 의 그라프는 함수 $y=\sqrt{x}$ 의 그라프를 y축의 정방향으로 2만큼 평행이동하면 얻어진다.

례 2. $y=\sqrt{x+2}$ 의 그라프는 함수 $y=\sqrt{x}$ 의 그라프를 x축의 정방향으로 −2만큼 평행이동하면 얻어진다.

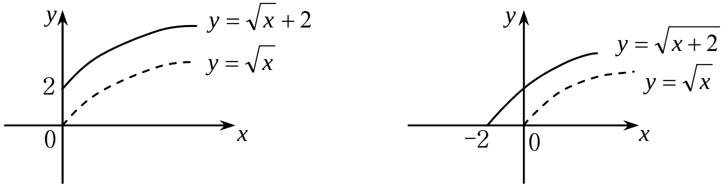


그림 1-6

문 제

1. 다음 함수의 그라프를 y축의 정방향으로 3, −2만큼 각각 평행이동하면 어떤 함수의 그라프가 얻어지겠는가?

1) $y=0.5x$ 2) $y=\sqrt{x}$ 3) $y=3x^2+6x+1$

2. 다음 함수의 그라프를 x축의 정방향으로 2, −2만큼 각각 평행이동시키면 어떤 함수의 그라프가 얻어지겠는가?

1) $y=1-3x$ 2) $y=-x^2$ 3) $y=x^3$ 4) $y=|x|$

3. $y=3x^2-1$의 그라프를 어떻게 이동하여야 다음 함수의 그라프를 얻게 되는가?

1) $y=3x^2$　　2) $y=3x^2+1$

4. $y=(2x-3)^2$의 그라프를 얻자면 $y=4x^2$의 그라프를 어떻게 이동시켜야 하는가?

찾기 1. 함수 $y=(x+3)^2-1$의 그라프는 $y=x^2$의 그라프를 어떻게 이동하여 얻었는가?

2. $y=f(x)=x^2$일 때 함수 $y=(x+3)^2-1$을 $y=f(x)$에 관하여 표시하여라.

함수 $y=f(x-m)+n$의 그라프는 $y=f(x)$의 그라프를 x축의 정방향으로 m만큼 평행이동한 다음 y축의 정방향으로 n만큼 평행이동하여 얻는다.

문 제

1. 다음 함수의 그라프를 $y=x^2$, $y=|x|$의 그라프를 이동하는 방법으로 대강 그려보아라.

1) $y=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+3$　　2) $y=(5-x)^2-2$　　3) $y=|x-3|+2$

2. 그림 1-7에서 포물선 G_1, G_2, G_3은 각각 어떤 함수의 그라프인가?

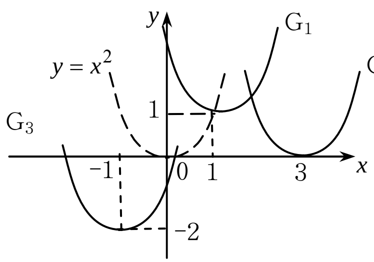


그림 1-7

3. 함수 $y=x^3$ 의 그라프로부터 다음 함수의 그라프를 어떻게 얻을 수 있겠는가?

1) $y=x^3-5$ 2) $y=\left(x-\frac{1}{2}\right)^3+3$

4. 함수 $y=f(x)$ 의 그라프를 y축에 $m<0$일 때 아래로 평행되게 $|m|$ 만큼 이동하면 ( )의 그라프가 얻어진다.

1) $y=f(x)+m$ 2) $y=f(x)-m$

3) $y=f(x)+|m|$ 4) 확정할수 없다.

5. 함수 $y=f(x)$ 의 그라프를 y축에 평행되게 $|m|$ 만큼 우로 평행이동하면 ( )가 얻어진다.

1) $y=f(x-m)$의 그라프 2) $y=f(x)+|m|$ 의 그라프

3) $y=f(x+m)$의 그라프 4) $y=f(x-|m|)$ 의 그라프

2) 대칭이동

알아보기 1. 함수 $y=2x^2$ 의 그라프를 어떻게 이동하면 $y=-2x^2$ 의 그라프를 얻을수 있겠는가?

2. $y=x-2$ 의 그라프를 y축에 관하여 대칭이동하면 어떤 함수의 그라프가 얻어지겠는가?

3. 함수 $y=f(x)$ 의 그라프로부터 함수 $y=-f(x)$, $y=f(-x)$ 의 그라프를 각각 얻자면 어떻게 하면 되겠는가를 생각하여보아라.

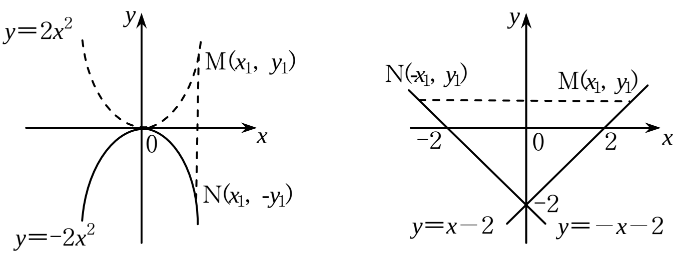


그림 1-8

1. 함수 $y=f(x)$의 그라프를 x축에 관하여 대칭이동하면 함수 $y=-f(x)$의 그라프를 얻는다.
2. 함수 $y=f(x)$의 그라프를 y축에 관하여 대칭이동하면 함수 $y=f(-x)$의 그라프를 얻는다.

문 제

1. 다음 함수의 그라프를 x축에 관하여 대칭이동하면 어떤 함수의 그라프를 얻게 되는가?

1) $y=1-3x$ 2) $y=x^3$ 3) $y=x^2-8x+16$ 4) $y=|x-3|$

2. 다음 함수의 그라프를 y축에 관하여 대칭이동하면 어떤 함수의 그라프를 얻게 되는가?

1) $y=-x+2$ 2) $y=2(x-2)^2$ 3) $y=x^2-2x+3$

3. 함수 $y=2x^2$의 그라프를 어떻게 이동하면 다음 함수의 그라프를 얻을수 있는가?

1) $y=-2(x-3)^2$ 2) $y=-2(x-3)^2-5$ 3) $y=-2x^2+x+\frac{7}{8}$

4. 다음 함수의 그라프는 y축에 관하여 대칭이동하여도 달라지지 않는다. 왜 그런가?

1) $y=|x|$ 2) $y=ax^2$

알아보기 1. 함수 $y=x^{\frac{1}{2}}$의 그라프를 x축에 관하여 대칭이동한 다음 련이어 y축에 관하여 대칭이동하면 어떤 함수의 그라프가 얻어지겠는가?

2. 함수 $y=x^{\frac{1}{2}}$의 그라프로부터 함수 $y=-(-x)^{\frac{1}{2}}$의 그라프를 단번에 얻자면 무엇에 관한 대칭이동을 진행하면 되겠는가?

3. 함수 $y=f(x)$의 그라프로부터 함수 $y=-f(-x)$의 그라프를 얻자면 어떻게 하면 되겠는가를 생각해 보아라.

일반적으로 함수 $y=f(x)$의 그라프를 원점에 관하여 대칭이동하면 $y=-f(-x)$의 그라프를 얻는다.

문 제

1. $y=x^2-4x+5$와 $y=-x^2-4x-5$의 그라프는 원점에 관하여 대칭이다. 왜 그런가?
2. 다음 함수의 그라프를 원점에 관하여 대칭이동하면 어떤 함수의 그라프를 얻게 되는가?

   1) $y=3-5x$ 2) $y=-3x^2+x-2$
3. 다음 함수의 그라프는 원점에 관하여 대칭이동하여도 달라지지 않는다. 왜 그런가?

   1) $y=x$ 2) $y=ax^3$ $(a\neq 0)$ 3) $y=\dfrac{1}{x}$

3) 확대와 축소

알아보기 함수 $y=x^2$과 $y=3x^2$의 그라프에서

1) x자리표가 같은 점들의 y자리표사이에는 어떤 관계가 있겠는가?

2) $y=x^2$의 그라프로부터 $y=3x^2$의 그라프를 어떻게 얻을수 있겠는가?

3) $a>0$일 때 함수 $y=x^2$의 그라프에서 x자리표는 그대로 두고 y자리표만 a배하면 어떤 함수의 그라프가 나오겠는가?

$y=af(x)$의 그라프

$a>0$일 때 $y=f(x)$의 그라프를 y축방향으로 a배 확대(또는 축소)하면 $y=af(x)$의 그라프를 얻는다.

($a>1$이면 확대, $0<a<1$이면 축소)

$a<0$일 때에도 확대 또는 축소라는 말을 쓰는데 이것은 y축방향으로 $|a|$배 확대(또는 축소)하고 이어서 x축에 관한 대칭이동을 의미하는것으로 약속한다.

문 제

1. 다음 함수의 그라프에서 y축방향으로 2배, 0.5배 하면 어떤 함수의 그라프가 얻어지겠는가?

1) $y=x+1$ 2) $y=x^2-3$ 3) $y=\frac{1}{x}$ 4) $y=\sqrt{x}$

2. 함수 $y=x^2$의 그라프로부터 다음 함수의 그라프를 어떻게 얻을수 있겠는가?

1) $y=\frac{3}{4}x^2$ 2) $y=5(x-1)^2$ 3) $y=\frac{1}{2}(x+3)^{\frac{1}{2}}-5$

4) $y=3x^2-12x+7$ 5) $y=ax^2+bx+c$ 6) $y=-2(x+1)^2$

련습문제

1. 다음 물음에 대답하여라.

1) 바른4각형의 둘레를 x, 그 면적을 y라고 할 때 y는 x의 함수인가?

2) 30km/h의 속도로 t시간동안에 달린 거리를 Skm로 표시하면 S는 t의 함수인가?

2. 어떤 함수 f가 그림 1-9와 같은 그라프로 주어졌다. 이것을 보고 다음것을 구하여라.

1) f 의 뜻구역과 값구역

2) $f(-4)$, $f(-2)$, $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$

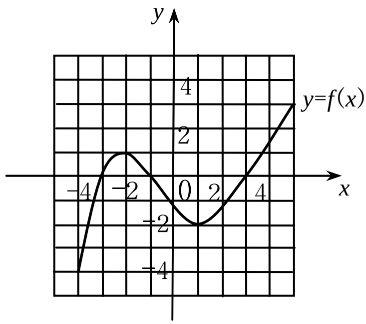


그림 1-9

3. 다음 함수의 뜻구역을 구하여라.

1) $y=\frac{7x^2-5x+1}{7}$ 2) $y=\frac{3-x}{x^2-1}$

3) $y=\dfrac{x+2}{x^2-x-6}$　　　　4) $y=\sqrt{3x-1}$

4. 어떤 1차함수의 독립변수 x가 [−6, 2]에서 변할 때 함수값 y는 [2, 6]에서 변한다. 이 함수를 구하여라.

5. $y=|x|$와 같은 함수는 (　)이다.

1) $y=\sqrt{x^2}$　　2) $y=\dfrac{x^3}{x}$　　3) $y=\left(\sqrt{x}\right)^2$　　4) $y=\dfrac{x^3}{x^2}$

6. $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^3+\dfrac{1}{x^3}$ 일 때 $f(x)$를 구하여라.

7. $y=\dfrac{x}{3}+m$ 과 $y=nx-6$ 이 서로 거꿀함수라면 m, n의 값은 얼마인가?

8. $y=-\sqrt{x}$ 의 거꿀함수는 $y=x^2$ ($x\le 0$)이다. 이 함수의 뜻구역은 (　)이다.

1) $x\in \mathrm{R}$　　　　2) $\{x \mid x\in \mathrm{R},\ x\ne 0\}$

3) $\{x \mid x>0\}$　　　　4) $\{x \mid x\le 0\}$

9. 다음 함수의 거꿀함수를 구하여라.

1) $y=|x-1|$ $x\in(-\infty,\ 1]$　　　　2) $y=\dfrac{3x+4}{5-2x}$ $x\ne 2.5$

제2절. 지수함수와 로그함수

1. 지수함수

알아보기 1) 지수식 2^x에서 서로 다른 $x_1=1$, $x_2=2$에 대하여 2^{x_1}, 2^{x_2}이 다른가?

2) 임의의 서로 다른 x_1, x_2에 대하여 2^{x_1}, 2^{x_2}이 서로 다른가 알아보아라.

a가 1이 아닌 정수일 때 $$f(x)=a^x$$ 으로 표시되는 함수를 **지수함수**라고 부른다.

례 1. 지수함수 $f(x)=2^x$의 그라프를 그려라.

(풀이) x의 값에 따르는 2^x의 값을 표로 작성하면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	$\cdots$
2^x	$\cdots$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	$\cdots$

이 표에 의하여 그라프를 그리면 그림 1-10과 같다.

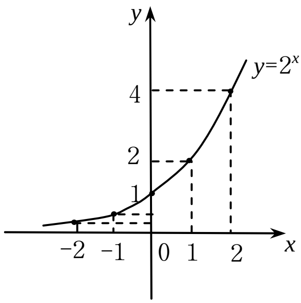


그림 1-10

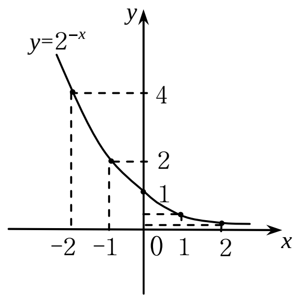


그림 1-11

례 2. 지수함수 $f(x)=2^{-x}$의 그라프를 그려라.

(풀이) $f(x)=2^{-x}=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

x의 값에 따르는 $\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 값을 표로 작성하면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	$\cdots$
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	$\cdots$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$

이 표에 의하여 그라프를 그리면 그림 1-11과 같다.

례 1, 2에서 알수 있는것처럼 지수함수 $f(x)=2^x$의 그라프와 $f(x)=2^{-x}$의 그라프는 y축에 관하여 대칭이다.

알아보기 1) 지수함수 $f(x)=2^x$ 은 증가하는 함수인가 감소하는 함수인가?

2) 지수함수 $f(x)=2^{-x}$ 은 어떤가?

3) $x>0$일 때 우의 두 함수의 값이 부수로 되는 때가 있겠는가?

지수함수의 성질
1) 뜻구역은 $(-\infty,\ +\infty)$, 값구역은 $(0,\ +\infty)$이다.
2) $x=0$일 때 함수값은 $y=1$이다.
3) $a>1$일 때 증가함수이고 $0<a<1$일 때 감소함수이다.

문 제

1. □에 기호 =, <, >가운데서 알맞는것을 써넣어라.

1) $a>1$일 때 $a^k>a^\ell$이면 k□ ℓ

2) $0<a<1$일 때 $a^k<a^\ell$이면 k□ ℓ

3) $a\neq1$, $a>0$일 때 $a^k=a^\ell$이면 k□ ℓ

4) $k<\ell$일 때 $a^k>a^\ell$이면 a□$1(a>0)$

5) $a>1$, $a^k<1$ 이면 k□0

6) $k<0$, $a^k>1$이면 a□$1(a>0)$

2. $a>1$일 때 다음것을 증명하여라.

1) $x>0 \Rightarrow a^x>1$ 2) $x<0 \Rightarrow 0<a^x<1$

3. $0<a<1$일 때 다음것을 증명하여라.

1) $x>0 \Rightarrow 0<a^x<1$ 2) $x<0 \Rightarrow a^x>1$

4. 함수 $y=2^x$의 그라프를 변환하여 다음 함수의 그라프를 그려라.

1) $y=-2^x$ 2) $y=2^x-1$ 3) $y=2^{x-2}$ 4) $y=8\cdot2^x$

5. 다음 함수의 그라프를 그려라.

1) $y=3^x$ 2) $y=3^{|x|}$ 3) $y=0.75^{|x|}$

6. $f(x)=a^x$ 일 때 다음 같기식을 증명하여라.

1) $f(x)\cdot f(y)=f(x+y)$ 2) $\dfrac{f(x)}{f(y)}=f(x-y)$

3) $[f(x)]^y=f(xy)$

2. 로그함수

알아보기 지수함수 $f(x)=a^x$ 은 거꿀함수를 가진다. 왜 그런가?

> 지수함수 $f(x)=a^x$ 의 거꿀함수
>
> $$y=\log_a x \quad (a\neq 1,\ a>0)$$
>
> 를 **로그함수**라고 부른다.

로그함수의 그라프는 지수함수 $f(x)=a^x$ 의 그라프와 직선 $y=x$ 에 관하여 대칭이다.

례 1. 로그함수 $y=\log_2 x$ 의 그라프를 그려라.

(풀이) 지수함수 $y=2^x$ 의 그라프로부터 $y=\log_2 x$ 의 그라프를 그리면 그림 1-12와 같다.

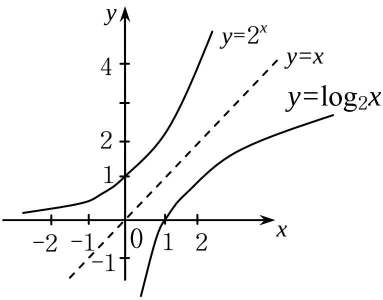


그림 1-12

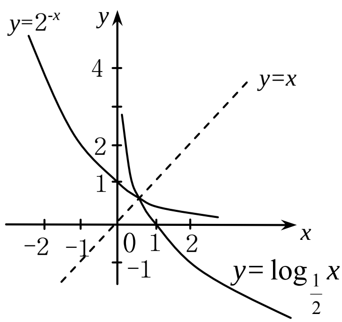


그림 1-13

례 2. 로그함수 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 의 그라프를 그려라.

(풀이) 지수함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 그라프로부터 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 의 그라프를 그리면 그림 1-13과 같다.

알아보기 1) 로그함수 $y=\log_2 x$ 와 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 는 점 (1, 0)을 지나겠는가?

2) 로그함수 $y = \log_a x$ 는 어느때 증가하고 어느때 감소하는가?

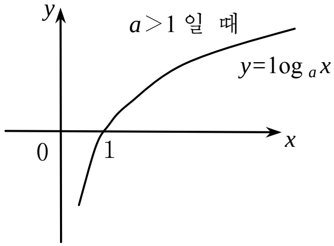


그림 1-14

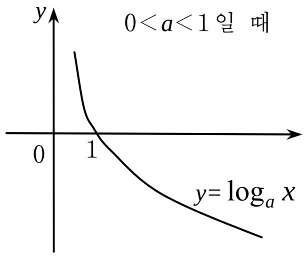


그림 1-15

로그함수의 성질
1) 뜻구역은 $(0, +\infty)$이고 값구역은 $(-\infty, +\infty)$이다.
2) $x=1$ 일 때 함수값은 $y=0$ 이다.
3) $a>1$ 일 때 증가함수이고 $0<a<1$ 일 때 감소함수이다.

문 제

1. 다음 안같기식이 성립하자면 a는 어떤 수여야 하는가?

1) $\log_a 8 < \log_a 5$　　　2) $\log_a \frac{1}{2} > \log_a \frac{1}{3}$

2. $a>1$일 때 다음것을 증명하여라.

1) x▲$1 \Rightarrow \log_a x > 0$　　　2) $0 < x < 1 \Rightarrow \log_a x < 0$

3. 로그함수 $y = \lg x$ 의 그라프를 변환하여 다음 함수의 그라프를 그려라.

1) $y = -\lg x$　　　2) $y = \lg(x+3)$　　　3) $y = \lg(-x)$

4. 다음 두 로그가운데서 어느것이 큰가?

1) $\log_8 7$,　$\log_8 6.5$　　　2) $\log_{\frac{1}{8}} \frac{3}{4}$,　$\log_{\frac{1}{8}} 0.8$

련습문제

1. 다음 함수들가운데서 지수함수를 갈라내여라.

1) $y=2^7$　　　2) $y=\pi^x$　　　3) $y=(-1.5)^{-2x}$

4) $y=x^{2x}$　　　5) $y=0.75^x$

2. 다음 함수들가운데서 증가함수와 감소함수를 갈라내여라.

1) $y=4^x$　　2) $y=1.1^x$　　3) $y=0.99^x$

4) $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$　　5) $y=\left(\dfrac{4}{3}\right)^x$

3. $y=2x$의 그라프를 리용하여 다음 함수의 그라프를 그려라.

1) $y=-2^{x-2}$　　2) $y=2^{x+2}$　　3) $y=2^x+2$

4. 다음 함수들가운데서 로그함수를 갈라내여라.

1) $y=\log_x 3$　　2) $y=\log_\pi x$　　3) $y=\lg(x-1)$

5. 다음 함수들가운데서 증가함수와 감소함수를 갈라내여라.

1) $y=\log_2 x$　　2) $y=\log_{\frac{4}{3}} x$

3) $y=\log_{\frac{4}{3}} 2x$　　4) $y=\log_{0.01} x$　　5) $y=\log_{0.01}(10000x+324)$

6. $y=\log_2 x$의 그라프를 y축에 관하여 대칭이동하면 어떤 함수의 그라프가 얻어지는가?

제3절. 지수방정식과 지수안같기식

1. 지수방정식

알아보기 지수함수의 성질을 써서 다음것을 풀어라.

1) $a>0$, $a\neq 1$일 때 $a^k=a^\ell \Leftrightarrow k=\ell$이 옳다고 말할수 있겠는가?

2) a, $b>0$, a, $b\neq 1$, $a\neq b$일 때 $a^k=b^k \Rightarrow k=0$이 옳다고 말할수 있겠는가?

> $2^{x+1}=8$, $3^{x+1}+3^x=1$과 같이 지수식이 들어있는 방정식을 **지수방정식**이라고 부른다.

지수방정식을 풀 때 다음의 명제들을 리용한다.

$$a^{f(x)}=a^{g(x)}(a>0,\ a\neq 1)\Leftrightarrow f(x)=g(x)$$
$$a^{f(x)}=b^{f(x)}(a,\ b>0,\ a,\ b\neq 1,\ a\neq b)\Leftrightarrow f(x)=0$$

례 1. 방정식 $3^{x-1}=\frac{1}{27}$ 을 풀어라.

(풀이) $3^{x-1}=\frac{1}{3^3} \Leftrightarrow 3^{x-1}=3^{-3} \Leftrightarrow x-1=-3$

따라서

$x=-2$

풀이모임 {-2}

례 2. 방정식 $2^{x+2}-2^x=96$ 을 풀어라.

(풀이) $2^x \cdot 2^2-2^x=96 \Leftrightarrow 3\cdot 2^x=96 \Leftrightarrow 2^x=32$

따라서

$x=5$

풀이모임 {5}

문 제

다음 지수방정식을 풀어라.

1) $4^{1-x}=32$　　2) $\left(\frac{4}{9}\right)^{x-2}=\frac{8}{27}$

3) $3^{x+1}-3^x-54=0$　　4) $7^x-7^{x-1}=6$

2. 지수안같기식

알아보기 지수함수의 성질을 써서 다음것을 밝혀라.

1) $a>1$일 때 $a^k<a^\ell \Rightarrow k<\ell$

$0<a<1$일 때 $a^k<a^\ell \Rightarrow k>\ell$

2) a, b가 어떤 정수일 때 $a^k<b^k \Rightarrow k>0$

> $2^{x+1}>1$,　$3^{x-1}<27$ 과 같이 지수식이 들어있는 안같기식을 **지수안같기식**이라고 부른다.

지수안같기식을 풀 때 다음 명제들을 리용한다.

$$a^{f(x)} < a^{g(x)}, \; a>1 \Rightarrow f(x) < g(x)$$
$$a^{f(x)} < a^{g(x)}, \; 0<a<1 \Rightarrow f(x) > g(x)$$
$$a^{f(x)} < b^{f(x)}, \; a, \; b \neq 1, \; a>b>0 \Rightarrow f(x) < 0$$
$$a^{f(x)} < b^{f(x)}, \; a, \; b \neq 1, \; b>a>0 \Rightarrow f(x) > 0$$

례 1. 안갈기식 $2^x<0.25$를 풀어라.

(풀이) $2^x < 0.25 \Leftrightarrow 2^x < \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2^x < 2^{-2} \Leftrightarrow x < -2$

풀이모임 $(-\infty, -2)$

례 2. 안갈기식 $3^{x+1}-3^x<54$를 풀어라.

(풀이) $3^{x+1}-3^x<54 \Leftrightarrow 3^x(3-1)<54 \Leftrightarrow 3^x<27 \Leftrightarrow 3^x<3^3 \Leftrightarrow x<3$

풀이모임 $(-\infty, 3)$

문 제

다음 지수안같기식을 풀어라.

1) $3^x < \frac{1}{9}$ 2) $6^x < 216$ 3) $0.3^x < 0.3^{\frac{7}{3}}$

4) $10^{x-1} < 0.01$ 5) $8^{x-1} \cdot 2^x > 0.25$ 6) $(10^x)^{\frac{1}{3}} \cdot 0.001 > 10$

7) $\frac{(3^{-x})^2}{9} > 3^x$ 8) $2^x - 2^{x-2} > 14$ 9) $16^{x+\frac{1}{2}} \le 15 \cdot 4^x + 4$

련습문제

1. 다음 함수는 지수함수인가 제곱함수인가?

1) $y = x^5$ 2) $y = 6^x$ 3) $y = 1.5^x$

4) $y = x^{2x}$ 5) $y = 1.2^x$ 6) $y = \left(\frac{4}{3}\right)^x$

2. 다음의 제곱함수들가운데서 어느것이 큰가? 그 까닭을 지수함수의 성질에 의하여 밝혀라.

1) $5^{0.3}$과 $5^{0.4}$ 2) $0.7^{\sqrt{2}}$과 $0.7^{\sqrt{3}}$

3) $\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{0.75}$과 $\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{0.8}$ 4) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-1.8}$과 $\left(\frac{3}{5}\right)^{-1.9}$

3. 다음 지수방정식을 풀어라.

1) $9^x = 3$ 2) $5^x = 0.5$ 3) $7^x = 7^{\sqrt{2}}$

4) $27^x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 5) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{32}{243}$

4. 다음 지수방정식을 풀어라.

1) $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$ 2) $2^{x+1} + 2^{x-2} = \frac{9}{16}$

3) $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} = 448$ 4) $3^{2x} + 9 = 28 \cdot 3^x$

5) $2^{2x} + 2^{x+2} - 32 = 0$ 6) $3^x - 18 \cdot 3^{-x} = 7$

7) $3^{x+1} + 3^{x-1} + 3^{x-2} = 5^x + 5^{x-1} + 5^{x-2}$

5. 다음 지수안같기식을 풀어라.

1) $(5^{-x})^{-2} > \frac{\sqrt{3}}{125}$ 2) $\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^x < \frac{1}{16}$ 3) $\left(\frac{1}{4}\right)^x + 32 < 12\left(\frac{1}{2}\right)^x$

4) $3^{\frac{2x+3}{2}} < \sqrt{27^{2x-1}}$ 5) $2^{|x-1|} > 16$ 6) $0.2^{|x-1|} > 0.2^{x-2}$

7) $3^{2x+1} < 3^{\sqrt{x+1}}$ 8) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x^2-x-6}} > \left(\frac{1}{2}\right)^{x+5}$

제4절. 로그방정식과 로그안같기식

1. 로그방정식

$\log_2(x-2) = 3$, $\log_{10} x + \log_{10}(x-3) = 1$과 같이 로그식이 들어있는 방정식을 **로그방정식**이라고 부른다.

로그방정식은 로그의 정의와 로그의 성질을 써서 로그기호가 들어있지 않는 방정식으로 고쳐서 푼다. 이때 얻어진 풀이가운데서 로그방정식에 갈아넣어 0 또는 부수의 로그가 나타나게 되는것은 버려야 한다.

례. 다음 방정식을 풀어라.

$$\lg x + \lg(x+3) = 1$$

(풀이) $\lg x + \lg(x+3) = \lg x(x+3) = \lg 10$

따라서

$$x(x+3) = 10$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$(x-2)(x+5) = 0$$

이로부터 $x=2$, $x=-5$

여기서 $x=-5$는 버려야 한다.

풀이모임 {2}

문 제

1. 다음 로그방정식을 풀어라.

1) $2\log_2 x = \log_2 32 - \log_2 x$ 2) $\log_3(x+5) = \log_3(2x-1)$

3) $\log_4 x + \log_x 4 = 0$ 4) $\log_2 x + \log_{16} x = 14$

5) $x^{\lg x} = 100$ 6) $\log_{x^2} 2 = -1$

2. 다음 련립방정식을 풀어라.

1) $\begin{cases} \log_4 x - \log_2 y = 0 \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{y^2} = 1 \\ \log_2 x + \log_2 y = 3 \end{cases}$

2. 로그안같기식

$\log_2 x + 3\log_2(x+1) < 1$과 같이 로그식이 들어있는 안같기식을 **로그안같기식**이라고 부른다.

로그안같기식을 풀 때에도 로그방정식을 풀 때와 같이 로그의 정의와 로그의 성질을 써서 로그기호가 들어있지 않는 안같기식으로 고쳐서 푼다.

이때 다음의 성질을 리용한다.

$$\log_a A < \log_a B \Leftrightarrow 0 < A < B \ (a > 1)$$

$$\log_a A < \log_a B \Leftrightarrow A > B > 0 \ (0 < a < 1)$$

례. 다음 안같기식을 풀어라.

$$\log_2 x + \log_2(x-1) < 1$$

(풀이) 로그의 의미로부터

$$x > 0,\ x - 1 > 0$$

그러므로 $x>1$인 값들가운데서 풀이를 찾아야 한다.

$$\log_2 x+\log_2(x-1)<1$$

$$\log_2 x(x-1)<\log_2 2$$

따라서 $x(x-1)<2$

$$x^2-x-2<0$$

이 안갈기식을 풀면 $-1<x<2$

$x>1$이므로 $1<x<2$ 풀이모임 $(1,\ 2)$

문 제

1. 다음 로그안갈기식을 풀어라.

1) $\log_3(x-2)>1$ 2) $\log_{0.1}(x^2-x)>0$

3) $\lg x+\lg(x-3)>0$ 4) $\lg(x-3)+\lg x<1$

5) $\log_2 x(\log_2 x+1)\le 2$ 6) $\lg(2x^2-x)>\lg(x^2-4x+1)$

2. 함수 $y=\lg(x^2-3x+6)$에 대하여

1) $y=1$로 되는 x를 구하여라.

2) x가 어떤 값일 때 $y<0$으로 되겠는가?

3. 수 $\left(\frac{81}{80}\right)^{1000}$과 100 000은 어느것이 더 큰가?

련습문제

1. 다음 로그방정식을 풀어라.

1) $\log_2(x+8)-\log_2(5-x)=1$ 2) $\log_5(x^2-x+4)=2\log_5 x$

3) $\log_x 2\cdot\log_{2x}2=\log_{4x}2$ 4) $\log_2 x-6\log_x 2=1$

5) $\dfrac{1}{5-\lg x}+\dfrac{2}{5+\lg x}=1$

2. 다음 로그방정식을 풀어라.

1) $\log_x\dfrac{1}{\sqrt{a}}=\log_a\dfrac{1}{x^2}\ (a>0)$ 2) $\log_a(x-a)+\log_a(2x-3a)=2$

3. 다음 련립방정식을 풀어라.

1) $\begin{cases} x^2+y^2=29 \\ \lg x+\lg y=1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \lg\left(xy+\dfrac{x}{y}\right)=0 \\ \log_4\left(\dfrac{y}{x}+\dfrac{1}{xy}\right)=1 \end{cases}$

4. 수표없이 x를 구하여라.

$$x = 10 \cdot 100^{\frac{1}{2}\lg 9 - \lg 2}$$

5. $\log_2 x$와 $\log_{\frac{1}{2}} x$의 크기를 비교하여라.

6. 다음 로그안같기식을 풀어라.

1) $\lg x^2 + 1 < (\lg x^3 - 1)^2$ 2) $\sqrt{\lg x - 1} < 3 - \lg x$

복습문제

1. $y = \dfrac{1}{1 - x^2}\ (x < 0)$의 거꿀함수를 구하여라.

2. $f\left(\dfrac{x-1}{x}\right) = \dfrac{x^2+1}{x^2} + \dfrac{1}{x}$일 때 $f(x)$를 구하여라.

3. 함수 $y = \dfrac{1}{x}$를 변환하는 방법으로 다음 함수의 그라프를 대강 그려라.

1) $y = \dfrac{7}{x-3}$ 2) $y = \dfrac{16}{x+7}$ 3) $y = \dfrac{9x}{3x+1}$

4. 함수 $y = \sqrt{x}$를 변환하는 방법으로 다음 함수의 그라프를 대강 그려라.

1) $y = 3\sqrt{x} + 2$ 2) $y = \sqrt{x-3} + 4$

5. $0 < x_1 < x_2$일 때

$$\frac{a^{x_1} + a^{x_2}}{2} > a^{\frac{x_1 + x_2}{2}} \quad (a \neq 1,\ \ a > 0)$$

을 증명하고 그 기하학적의미를 설명해보아라.

6. $x = \dfrac{1}{2}\left(a^{\frac{1}{n}} - a^{-\frac{1}{n}}\right)$일 때 $\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)^n$의 값을 구하여라.

7. 다음 지수방정식을 풀어라.

1) $4^{x+1} - 9 \cdot 2^{x+2} + 32 = 0$ 2) $3^{x+1} + 6 \cdot 3^{1-x} = 29$

3) $4^x + 6^x = 9^x$ 4) $9^x = 3^{x+1} - 2$

8. 어떤 조건밑에서 다음과 같이 쓸수 있는가?

1) $a^{f(x)} \geq a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \geq g(x)$

2) $\log_a f(x) \geq \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) \geq g(x)$

9. 다음 지수안갈기식을 풀어라.

1) $\dfrac{4^x}{4^x-3^x}<4$ 2) $5\cdot 4^x+2\cdot 25^x<7\cdot 10^x$

3) $2^x<3^{\frac{1}{x}}$ 4) $\dfrac{1}{2^x-4}>\dfrac{1}{2^x-1}$

10. 다음 방정식을 풀어라.

1) $\dfrac{\lg(35-x^3)}{\lg(5-x)}=3$ 2) $\log_{16}x+\log_4 x+\log_2 x=7$

3) $0.125\times 4^{2x-3}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}$ 4) $x^{\frac{\lg x+7}{4}}=10^{\lg x+1}$

11. 다음 로그방정식을 풀어라.

1) $\log_4\{2\log_3[1+\log_2(1+3\log_3 x)]\}=\dfrac{1}{2}$

2) $\left(\dfrac{\lg x}{2}\right)^{\lg^2 x+\lg x^2-2}=\lg\sqrt{x}$ 3) $\dfrac{1-2\lg^2 x^2}{\lg x-2\lg^2 x}=1$

12. $\log_a m+\log_b n=\log_a n+\log_b m$ 일 때 $a=b$ 또는 $m=n$ 이라는것을 증명하여라.

13. $\log_2 a=m,\ \ \log_5 a=n,\ \ \log_{10} a=p$ 일 때 ($a>0,\ a\neq 1$)

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{p}$$

을 증명하여라.

14. 방정식 $\log_2(ax-1)+\log_2(2x+1)=1$ 이 하나의 풀이를 가지자면 a가 어떤 값을 가져야 하는가?

15. 3각형의 세 변 $a,\ b,\ c$ 사이에

$$\log_{a+b}c+\log_{a-b}c=2\log_{a+b}c\cdot\log_{a-b}c$$

라는 관계가 있으면 이 3각형은 어떤 3각형인가?($c\neq 1$)

16. 방정식 $\lg(x-1)+\lg(3-x)=\lg(a-x)$ 의 풀이의 개수를 따져보아라.

17. 다음 로그안갈기식을 풀어라.

1) $\dfrac{3}{1-\lg\sqrt{x}}<\lg\dfrac{1}{x^2}$ 2) $\log_a(2x^2-8)>\log_a(x^2-3x+2)$

제2장. 3각형의 풀이

제1절. 시누스정리와 코시누스정리

1. 시누스정리

알아보기 한 뾰족각이 60°인 직3각형 ABC가 있다.

1) 세 변의 비 BC:CA:AB를 알아보아라.

2) $\sin A : \sin B : \sin C$ 를 알아보아라.

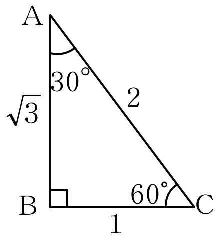


그림 2-1

시누스정리
정리 1. $\triangle ABC$ 에서 $$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$ 여기서 R 는 $\triangle ABC$ 의 외접원의 반경

(증명) $a=2R\sin A$ 임을 증명하자.

1) $A<90^\circ$ 인 경우(그림 2-2)

점 B 와 중심 O 를 맺는 직선이 원둘레와 사귀는 점을 A' 라고 하면 $\Delta A'BC$ 에서 $C=90^\circ$ 이므로

$$BC=A'B\sin A'$$

여기서 $BC=a$, $A'B=2R$, $A'=A$ 이므로

$$a=2R\sin A$$

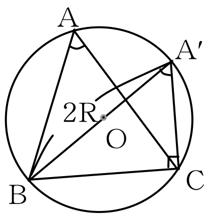


그림 2-2

2) $A>90^\circ$ 인 경우(그림 2-3)

$$BC=A'B\sin A'$$

여기서 $BC=a$, $A'B=2R$, $A'=180^\circ-A$ 이므로

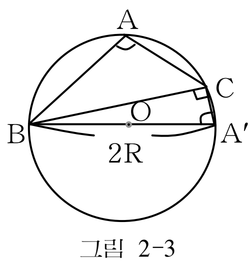


그림 2-3

$a = 2R\sin(180° - A) = 2R\sin A$

3) A＝90° 인 경우

BC＝2R, $\sin A = \sin 90° = 1$ 이므로

$$a = 2R = 2R\sin A$$

$b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$ 도 같은 방법으로 증명할수 있다.

시누스정리를 쓰면 다음의 같기식이 성립한다.

$$a + b = 4R\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$a - b = 4R\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

이로부터 탕겐스정리라고 부르는 다음의 정리를 얻을수 있다.

탕겐스정리

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\dfrac{A-B}{2}}{\tan\dfrac{A+B}{2}}$$

문제

1. △ABC 에서 다음것을 구하여라.

1) $a = 7$, $A = 105°$, $C = 45°$ 일 때 c ?

2) $a = 32$, $b = 10$, $A = 30°$ 일 때 B ?

3) $c = 20$, $A = 30°$, $B = 45°$ 일 때 a ?

2. △ABC 에서 $\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C$ 이면 이 3각형은 직3각형임을 증명하여라.

3. △ABC 에서 $b\sin B = c\sin C$ 이면 이 3각형은 어떤 3각형인가?

4. △ABC에서 $a > b$ 이면 A>B라는것을 시누스정리를 써서 증명하여라.

5. △ABC에서 변 a 는 2cm, 세 각의 비 A:B:C는 3:4:5로 되여있다. 변 b , c 의 길이는 각각 얼마인가?

2. 코시누스정리

알아보기 △ABC의 정점 B에서 변 AC 또는 그 연장선에 그은 높이를 BD라고 할 때 다음의 사실이 성립하는가를 알아보아라.

1) A<90° 인 경우

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = \mathrm{BD}^2 + (b-\mathrm{AD})^2 \\ \mathrm{BD}^2 = c^2 - \mathrm{AD}^2 \end{array}\right\} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2b\mathrm{AD}$$

2) A>90° 인 경우 $a^2 = b^2 + c^2 + 2b\mathrm{AD}$

3) A=90° 인 경우 $a^2 = b^2 + c^2$

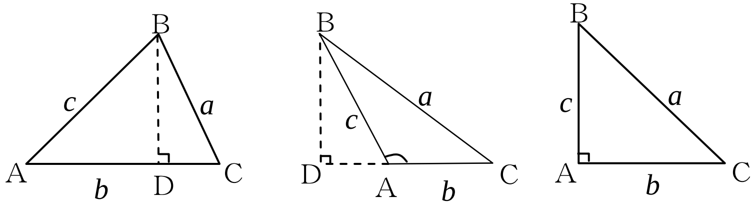


그림 2-4

코시누스정리

정리 2. △ABC 에서

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\mathrm{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\mathrm{B}$$
$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ba\cos\mathrm{C}$$

(증명) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\mathrm{A}$ 를 증명하자.

1) A<90° 인 경우

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b\mathrm{AD}$$

여기서 $\mathrm{AD} = c\cos\mathrm{A}$ 이므로

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\mathrm{A}$$

2) A>90° 인 경우

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2b\mathrm{AD}$$

여기서 $\mathrm{AD} = c\cos(180° - \mathrm{A}) = -c\cos\mathrm{A}$ 이므로

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\mathrm{A}$$

3) A=90° 인 경우

$a^2 = b^2 + c^2$, $\cos\mathrm{A} = 0$ 이므로

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\mathrm{A}$$

나머지 두 갈기식도 같은 방법으로 증명할수 있다.

문 제

1. △ABC에서 $b=3\sqrt{3}$, $c=6$, A＝30° 일 때 B를 구하여라.
2. △ABC에서 $a\cos A=b\cos B$ 이면 이 3각형은 2등변3각형 또는 직3각형임을 증명하여라.
3. △ABC에서 두 변과 그사이의 각이 다음과 같이 주어졌다. 나머지 한 변을 구하여라.

   1) $b=3,\ \ c=2,\ \ \mathrm{A}=135°$ 2) $a=8,\ \ b=5,\ \ \mathrm{C}=30°$

련습문제

1. △ABC에서 A＝120°, B＝30° 일 때 $a:b:c$를 구하여라.
2. △ABC에서 $a\cos B=b\cos A$ 이면 이 3각형은 어떤 3각형인가?
3. △ABC에서 $2b=a+c$ 일 때 $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}$의 값을 구하여라.
4. △ABC에서 같기식 $a(\sin B-\sin C)+b(\sin C-\sin A)+c(\sin A-\sin B)=0$이 성립한다는것을 증명하여라.
5. 직3각형 ABC에서 ∠A의 2등분선이 빗변 BC와 사귀는 점을 D, 변 AC의 가운데점을 E라고 하자. AB＝c, AC＝b일 때 sin(∠EDC)를 구하여라.
6. 코시누스정리를 써서 △ABC에서 다음 사실이 성립한다는것을 증명하여라.

   1) A가 뾰족각이면 $a^2<b^2+c^2$

   2) A가 무딘각이면 $a^2>b^2+c^2$

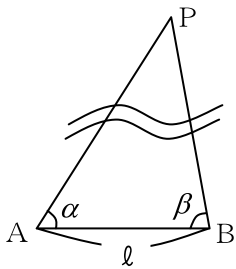


그림 2-5

7. 그림 2-5와 같이 지점 A와 B에서 직접 잴수 없는 지점 P까지의 거리 PA, PB를 구하여라.

   $\ell=306.4\text{m},\ \alpha=46°,\ \beta=58°$

8. △ABC 에서 같기식

   $\frac{\tan B}{\tan C}=\frac{a^2+b^2-c^2}{a^2-b^2+c^2}$ 이 성립한다는것을 증명하여라.

9. 간석지를 많이 개간할데 대한 위대한 령도자 **김정일**대원수님의 유훈을 높이 받들고 어느 한 간석지개간사업소에서는 해변가의 두 지점 P, Q를 련결하여 제방을 쌓으려고 다음과 같은 값들을 재였다. 이때 PQ사이의 거리를 구하여라. (그림 2-6)

$\ell=2\ 450\text{m}$, $\alpha=94°\ 10'$, $\beta=62°\ 48'$, $\gamma=86°\ 57'$, $\delta=57°\ 12'$

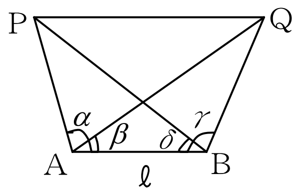


그림 2-6

제2절. 3각형의 풀이

알아보기 △ABC에서 요소 a, b, c, A, B, C가운데서 적어도 어떤 요소들이 있어야 3각형이 정해지는가?

3각형을 푼다는것은 3각형을 결정하는 요소들을 알고 나머지 요소들을 구하는것을 말한다.

찾기 A, B, c 가 주어진 경우 C, b, a 를 어떻게 구할수 있는가?
시누스정리를 써서 두 각과 한 변을 알고 다른 변을 구하는 공식

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A},\quad c=\frac{a\sin C}{\sin A}$$

를 이끌어내여라.

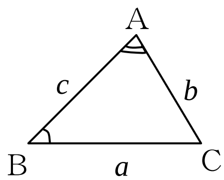


그림 2-7

1. 두 각과 한 변이 주어진 경우(A, B, a)

$$C=180°-(A+B)$$

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A},\quad c=\frac{a\sin C}{\sin A}$$

례. △ABC에서 다음과 같은 요소들을 알고 나머지 요소들을 구하여라.

$$A=37°\,54',\quad B=77°\,12',\quad a=631$$

(풀이) $b=\dfrac{a\sin \mathrm{B}}{\sin \mathrm{A}}=\dfrac{631\cdot\sin 77°12'}{\sin 37°54'}$

수표를 리용하지 않고 전자수산기로 sin 값을 구할수 있다.

① 먼저 77° 12′ 의 도수를 계산한다.

77 [+] 12 [/] 60＝77.2

② 다음 [sin] 를 누르면 0.975 1 이 나온다.

마찬가지 방법으로 sin37° 54′ 를 구하면 0.614 3이 나온다. 따라서 b 를 구하면

$$b=1001.6$$

(주의) 전자수산기에서 각의 단위가 도수로 표시되였을 때는 DEG, 라디안으로 표시된 각에 대하여 구하려면 RAD를 선택하여야 한다.

문 제

△ABC에서 다음과 같은 요소들을 알고 나머지 요소들을 구하여라.

1) B＝63° 16′, C＝41° 25′, a ＝186.6
2) A＝38° 27′, C＝39° 32′, b ＝10.3
3) A＝132° 15′, B＝38° 10′, c ＝678

찾기 a, b, C가 주어진 경우 A, B, c를 어떻게 구할수 있겠는가?

2. 두 변과 그사이의 각이 주어진 경우(a, b, C)

$$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos \mathrm{C}}$$

$$\sin \mathrm{A}=\frac{a\sin \mathrm{C}}{c}$$

$$\mathrm{B}=180°-(\mathrm{A}+\mathrm{C})$$

문 제

△ABC에서 다음과 같은 요소들을 알고 나머지 요소들을 구하여라.

1) a ＝42.6, b ＝63.5, C＝72° 46′
2) a ＝114.3, c ＝84.8, B＝25° 43′
3) b ＝6.21, c ＝10.93, A＝106° 37′

찾기 두 변과 한 맞은각사이에 다음과 같은 조건이 성립할 때 3각형이 결정되는가를 따져보아라.

1) $a > b\sin A$, $A < 90°$

2) $a = b\sin A$, $A < 90°$

3) $a < b\sin A$, $A < 90°$

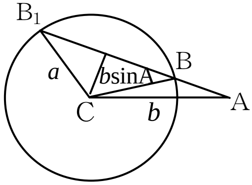


그림 2-8

이때 3각형이 결정되는 경우에는 나머지 요소들을 어떻게 구할수 있겠는가?

3. 두 변과 한 맞은각이 주어진 경우 $(a,\ b,\ A)$

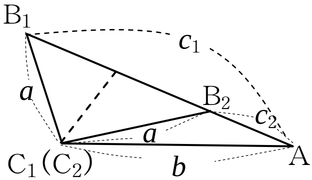
1) $a > b\sin A$ 인 경우

ΔAB_1C_1 에 대하여

$$\sin B_1 = \frac{b\sin A}{a}$$

$$C_1 = 180° - (A + B_1)$$

$$c_1 = \frac{a\sin C_1}{\sin A}$$



ΔAB_2C_2 에 대하여

$$\sin B_2 = \frac{b\sin A}{a}$$

$$C_2 = 180° - (A + B_2)$$

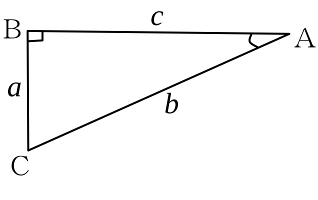
$$c_2 = \frac{a\sin C_2}{\sin A}$$

2) $a = b\sin A$ 인 경우

$$B = 90°$$

$$C = 90° - A$$

$$c = b\cos A$$



3) $a < b\sin A$ 인 경우 풀이가 없다.

문제

1. $A \geq 90°$ 일 때 a, b, A사이에 어떤 조건이 성립하여야 3각형이 정해지는가? 그때 3각형을 풀어라.

2. △ABC에서 다음과 같은 요소들을 알고 나머지 요소들을 구하여라.

1） $a=83.2$， $b=69.8$， $\mathrm{A}=71°18'$

2） $a=398$， $c=310$， $\mathrm{C}=21°18'$

3） $b=85.2$, $c=65.7$， $\mathrm{B}=68°12'$

4） $a=78$， $c=29$， $\mathrm{A}=32°11'$

찾기 a, b, c가 주어진 경우 A, B, C를 어떻게 구할수 있겠는가?

> **4. 세 변이 주어진 경우** (a, b, c)
>
> $$\cos\mathrm{A}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$
> $$\cos\mathrm{B}=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$
> $$\mathrm{C}=180^{\circ}-(\mathrm{A}+\mathrm{B})$$

문 제

$\Delta\mathrm{ABC}$ 에서 다음과 같은 요소들을 알고 나머지 요소를 구하여라.

1） $a=108.2$, $b=51.8$, $c=78.3$

2） $a=50$, $b=52$, $c=34$

3） $a=139.5$, $b=60.3$, $c=104.2$

해보기 1. $\Delta\mathrm{ABC}$ 의 정점 A에서 맞은변에 내린 높이를 h_a 라고 하고 다음과 같은 경우 h_a 를 각 B와 변 c 로 표시하여라.

1） $\mathrm{B}<90°$　2） $\mathrm{B}=90°$　3） $\mathrm{B}>90°$

2. $\Delta\mathrm{ABC}$ 의 면적 $\mathrm{S}=\frac{1}{2}ah_a$ 로부터 $\mathrm{S}=\frac{1}{2}ab\sin\mathrm{C}$ 를 이끌어내여라.

> 3 각형의 높이
>
> $$h_a=c\sin\mathrm{B}=b\sin\mathrm{C}=2\mathrm{R}\sin\mathrm{B}\sin\mathrm{C}$$
>
> 여기서 R：$\Delta\mathrm{ABC}$ 의 외접원의 반경

3 각형의 면적

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B$$
$$=2R^2\sin A\sin B\sin C$$

문 제

1. △ABC의 면적을 S라고 하면 $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (헤론의 공식)이라는것을 증명하여라. 여기서 $2p=a+b+c$ 이다.

2. ΔABC 의 면적을 S라고 하면

   1) $S=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin(B+C)}$　　　2) $S=\frac{abc}{4R}$

   이라는것을 증명하여라.

3. ΔABC 의 내접원의 반경을 r 라고 하면

   1) $r=\frac{S}{p}$

   2) $r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

   라는것을 증명하여라.(그림 2-9)

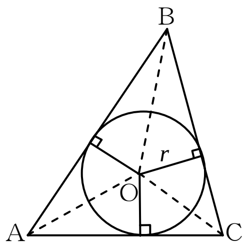


그림 2-9

련습문제

1. △ABC에서 다음의 요소들을 알고 나머지 요소들을 구하여라.

   1) a=23.46, B=97°, C=65°

   2) a=400.1, A=36°, B=79°

   3) a=49.4, b=26.4, C=47°

   4) a=87, b=65, A=75°

   5) a=13, b=18, c=15

2. △ABC의 정점 A에서 그은 가운데선을 m_a라고 하면

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$
$$= R\sqrt{2\sin^2 B + 2\sin^2 C - \sin^2 A}$$

이라는것을 증명하여라.(그림 2-10)

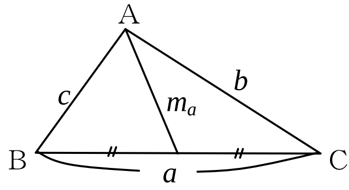


그림 2-10

3. △ABC의 외접원의 반경은 10cm이고 외접원둘레는 △ABC에 의해서 3:4:5의 비로 나누인다. △ABC의 면적을 구하여라.
4. 4각형 ABCD의 변의 길이가 AB=32cm, BC=13cm, CD=25cm, DA=18cm이고 대각선 AC=21cm이다. 이 4각형의 면적을 구하여라.
5. 제형의 두 밑변이 각각 a, b이고 두 밑각이 각각 α, β일 때 면적 S는

$$S = \frac{(b^2 - a^2)\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha + \beta)}$$

이라는것을 밝혀라.

복습문제

1. △ABC에서 다음것을 구하여라.
   1) $a = 8$, $b = 10$, $A = 30°$일 때 B=?
   2) $a = 5$, $c = 10$, $B = 60°$일 때 b=?
2. △ABC에서

$$\sin A = \sin(B + C)$$
$$\sin B = \sin(A + C)$$
$$\sin C = \sin(A + B)$$

이라는것을 밝혀라.

3. 코시누스정리를 써서 △ABC에서는 다음 사실이 성립된다는것을 설명하여라.
   1) A가 뾰족각이면 $a^2 < b^2 + c^2$
   2) A가 무딘각이면 $a^2 > b^2 + c^2$

4. △ABC에서 세 변이 다음과 같이 주어졌다. 세 각을 구하여라.

1) $a=2$, $b=3$, $c=4$

2) $a=7$, $b=3$, $c=5$

3) $a=3$, $b=4$, $c=5$

5. △ABC에서 두 변과 그사이 각이 다음과 같이 주어졌다. 면적을 구하여라.

1) $b=3$, $c=4$, A＝30°

2) $a=5$, $c=6$, B＝60°

3) $a=8$, $b=5$, C＝150°

6. 그림 2-11과 같이 직접 잴수 없는 두 지점 P, Q사이의 거리를 결정하기 위하여 다음과 같은 값들을 재였다. 거리 PQ를 구하여라.

$\ell=2.743\text{m}$, $\alpha=30°12'$, $\beta=41°25'$, $\gamma=116°04'$, $\delta=121°37'$

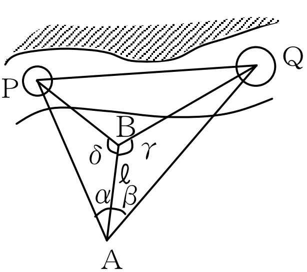


그림 2-11

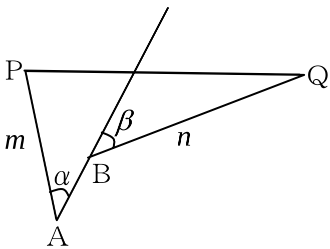


그림 2-12

7. 그림 2-12와 같이 두 지점 P, Q사이의 거리를 결정하기 위하여 다음과 같은 값들을 재였다. 거리 PQ를 구하여라.

AB＝3.125m, $\alpha=34°52'$, $\beta=52°16'$, m＝5.282m, n＝6.742m

8. △ABC에서 두 각과 그사이의 변이 다음과 같이 주어졌다. 면적을 구하여라.

1) B＝25°, C＝65°, $a=3$

2) A＝40°, C＝120°, $b=5$

3) A＝60°, B＝30°, $c=4$

9. 세 변이 다음과 같은 3각형의 면적을 구하여라.

1) $a=3,\quad b=4,\quad c=5$

2) $a=5,\quad b=7,\quad c=4$

3) $a=7,\quad b=5,\quad c=8$

10. 3각형에서 두 변은 달라지지 않고 그사이의 각이 점점 커지면 그 면적이 어떻게 변하겠는가? 또 면적이 가장 크게 되는 때는 어느때인가?

11. 세 각이 주어진 경우에 3각형은 꼭 하나로 정해지지 않는다. 왜 그런가?

12. 두 대각선의 길이가 a, b이고 이것들이 이루는 각이 θ인 4각형이 있다. 이 4각형의 면적을 구하여라.

13. △ABC에서 다음과 같은 요소들을 알고 나머지 요소들을 구하여라.

1) $a=197$, $B=31°53'$, $C=8°10'$

2) $b=136$, $c=99$, $A=61°56'$

3) $a=176$, $b=111.6$, $B=32°23'$

4) $a=7.6$, $b=12.1$, $c=6.8$

14. 강건너편의 두 지점 C, D사이의 거리를 재기 위하여 기준선 AB를 정하였다.

AB=500m, ∠CAB=70°, ∠DAB=50°, ∠DBA=77°, ∠CBA=61°라고 하면 C, D사이의 거리는 얼마인가?

15. 평행4변형에서 두 이웃변이 a, b이고 그사이의 각이 α일 때 그 면적 S는

$$S=ab\cdot\sin\alpha$$

와 같이 구할수 있다. 왜 그런가?

16. 원에 내접하는 4각형에서 변들이 a, b, c, d이고 a와 b사이의 각을 α라고 하면 그 면적 S는

$$S=\frac{1}{2}(ab+cd)\sin\alpha$$

와 같이 구할수 있다. 왜 그런가?

17. 3각형에서 세 변 a, b, c를 알 때 그 외접원의 반경은

$$R=\frac{abc}{4S}$$

와 같이 구할수 있다는것을 증명하여라.

제3장. 삼각함수

제1절. 일반각과 삼각함수

1. 라디안

알아보기 그림 3-1과 같이 각 α의 변 OA우에 두 점 M, P를 정하자.

OA가 회전이동할 때 점 M, P는 활등 $\overset{\frown}{MM_1}$, $\overset{\frown}{PP_1}$을 그린다.

1) 이때 비 $\dfrac{\overset{\frown}{MM_1}}{OM}$, $\dfrac{\overset{\frown}{PP_1}}{OP}$ 의 크기가 같겠는가?

2) 각 α를 2배, 3배 하면 비 $\dfrac{\overset{\frown}{MM_1}}{OM}$는 어떻게 변하는가?

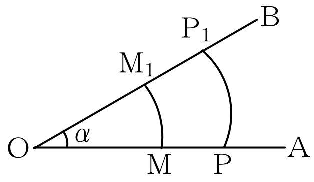


그림 3-1

주어진 각 α에 대하여 활등의 길이와 반경과의 비 $\dfrac{l}{r}$은 반경의 길이에 관계없이 항상 일정하다.

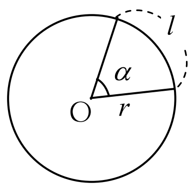
비 $\dfrac{l}{r}$은 각 α의 크기에만 비례하는 수이다.

그러므로 비 $\dfrac{l}{r}$에 의하여 각 α의 크기를 규정지을수 있다.

어떤 각 α에 대하여 그 각을 중심각으로 하는 활등의 길이와 반경과의 비 $\dfrac{l}{r}$을 그 각의 **라디안수**(또는 **라디안**)라고 부른다.

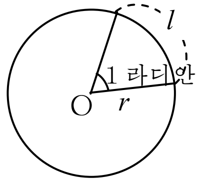
즉

$$\alpha = \frac{l}{r} \ (\text{라디안})$$



반경과 같은 활등을 가지는 중심각의 크기를 **1라디안**이라고 부른다.

즉 $l=r$ 일 때 $\alpha=1$ (라디안)로 표시한다.



360° 에 해당한 활등의 길이는 $l=2\pi r$ 이므로

$$360^\circ=\frac{2\pi r}{r}=2\pi$$

즉 $180^\circ=\pi$

이로부터

$$1^\circ=\frac{\pi}{180^\circ}\ (\text{라디안}),\quad 1\ (\text{라디안})=\frac{180^\circ}{\pi}\approx 57^\circ 17' 45''$$

례 1. 다음 각들을 도수는 라디안수로, 라디안수는 도수로 표시하여라.

$$-15^\circ\ ,\ 0.2\pi$$

(풀이) $-15^\circ=-15^\circ\cdot\dfrac{\pi}{180^\circ}=-\dfrac{\pi}{12}$

$$0.2\pi=0.2\pi\cdot\frac{180^\circ}{\pi}=36^\circ$$

례 2. 반경이 r 이고 중심각이 α 인 활등의 길이와 부채형의 면적을 구하여라.

(풀이) 중심각이 1라디안인 부채형에서 활등의 길이는 $l=r$ 이고 부채형의 면적은

$$S=\frac{\pi r^2}{2\pi}=\frac{r^2}{2}$$

따라서 중심각이 α 인 부채형에서

$$l=r\alpha,\quad S=\frac{r^2}{2}\alpha=\frac{1}{2}rl$$

문 제

1. 다음의 도수를 라디안수로 고쳐라.

1) 0°, 90°, 180°, 270°, 360°

2) 30°, 45°, 60°, 15°, 75°

3) 22° 45′, 157° 15′, 216° 30′

2. 다음의 라디안수를 도수로 고쳐라.

1) $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5}{6}\pi$, $\frac{5}{12}\pi$, $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{2}{7}\pi$

2) 3, 6.28, 1.25π, 0.5π, 15.7

3. 반경이 12cm이고 중심각이 60°, $\frac{3}{4}\pi$ 인 두 부채형의 활등의 길이 l과 면적 S를 구하여라.

2. 일반각

알아보기 반직선 OA를 점 O주위로 회전이동하여 OB위치로 보낸다. 이때 있을수 있는 회전각의 크기를 써보고 일반식으로 표시해보아라.

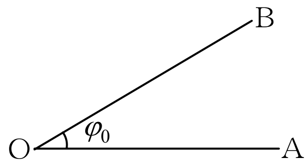


그림 3-2

회전방향이 시계바늘이 도는 방향과 반대일 때를 정의 회전, 같은 방향일 때를 부의 회전이라고 말하며 정의 회전각을 정수로, 부의 회전각을 부수로 표시한다.

반직선 OA를 회전이동하여 반직선 OB로 보낼 때 회전방향과 회전수까지 고려하여 있을수 있는 모든 회전각의 크기 φ를 **일반각**이라고 부른다. 일반각 φ는 다음과 같이 표시된다.

$$\varphi = \varphi_0 + 2\pi k \quad (k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots)$$

또는 $\varphi = \varphi_0 + 360° k \quad (k \in Z)$

여기서 φ_0 은 회전각의 끝변의 위치를 나타내는 자리각으로서 일반각 φ의 **엄지값**이라고 부른다.

엄지값은 $0° \le \varphi_0 \le 360°$ 또는 $-\pi \le \varphi_0 \le \pi$ 로 정할수도 있다.

례 1. 그림 3-3은 회전하는 반경 OM이 x축으로부터 출발하여 멎은 자리를 보여주고있다. OM의 자리각과 일반각을 써라.

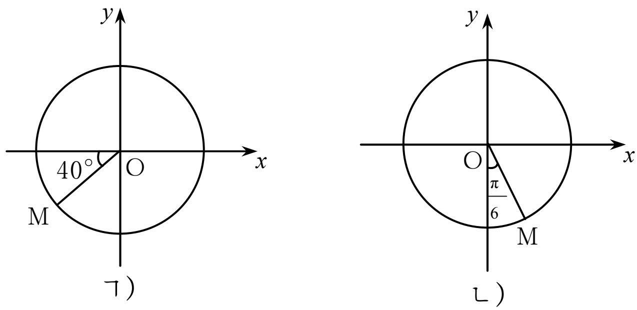


그림 3-3

(풀이) ㄱ) OM의 자리각은

$\varphi_0 = -180° + 40° = -140°$ 또는 $\varphi_0 = 180° + 40° = 220°$

일반각은 $\varphi = -140° + 360°k \quad (k \in \mathrm{Z})$

ㄴ) OM의 자리각은

$\varphi_0 = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3}$ 또는 $\varphi_0 = \frac{3}{2}\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{5}{3}\pi$

일반각은 $\varphi = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \quad (k \in \mathrm{Z})$

례 2. 972° 를 엄지값을 써서 표시하여라.

(풀이) $972° = -108° + 360° \times 3$

문 제

1. 다음 각들을 엄지값을 써서 표시하고 끝변의 위치를 그림으로 그려라.

1) 360°, 421°, 1 080°, 1 360°

2) 315°, -450°, -726°, -1 200°

3) 1.5π, 6.2π, $\frac{19}{2}\pi$, 12π

4) -4.5π, $-3\frac{3}{4}\pi$, -12.3π

2. 첫 변이 같은 두 각 α, β에 대하여 다음의 경우에 어떤 관계식이 성립하는가?

1) 끝변이 일치하는 경우

2) 끝변이 한 직선에서 서로 반대방향인 경우

3) 끝변이 수직인 경우

3. 삼각함수

알아보기 그림 3-4는 회전하는 반경 OM이 x축으로부터 일반각 θ만큼 회전한것을 보여주고있다.

반경의 끝점 M의 자리표를

M(x, y), OM$=r$라고 할 때

1) 비 $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{y}{x}$는 반경 r의 길이에 관계되는가?

2) 비 $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{y}{x}$는 무엇에 관계되는가?

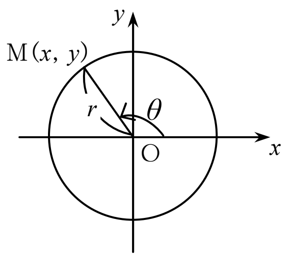


그림 3-4

주어진 각 θ에 대하여 비 $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{y}{x}$는 회전반경의 길이에 무관계하며 다만 각 θ의 크기에 의해서만 그 값이 정해진다.

각 θ에 비 $\frac{y}{r}$, $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{x}$를 대응시키는 함수를 각각 **시누스함수, 코시누스함수, 탕겐스함수**라고 부르고 다음과 같이 표시한다.

$$\sin\theta = \frac{y}{r}, \quad \cos\theta = \frac{x}{r}, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

또한 각 θ에 비 $\frac{x}{y}$, $\frac{r}{x}$, $\frac{r}{y}$를 대응시키는 함수를 각각 **코탕겐스함수, 세칸스함수, 코세칸스함수**라고 부르며 다음과 같이 표시한다.

$$\cot\theta = \frac{x}{y}, \quad \sec\theta = \frac{r}{x}, \quad \operatorname{cosec}\theta = \frac{r}{y}$$

이 함수들을 통털어서 **삼각함수**라고 부른다.

삼각함수의 정의로부터

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}, \quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \quad \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

삼각함수는 회전반경의 길이에 무관계하므로 흔히 반경이 1인 단위원을 리용한다.

단위원에서는 $r=1$이므로 $\sin\theta = y$, $\cos\theta = x$로 된다.

다시말하여 단위원둘레우의 점 M의 자리표는 $M(\cos\theta, \sin\theta)$로 된다.

알아보기 1) 매 분구에서 x, y의 부호를 말하여라.
2) 매 분구에서 $\cos\theta$, $\sin\theta$의 부호를 말하여라.

매 분구에서 $\cos\theta$, $\sin\theta$, $\tan\theta$의 부호는 그림 3-5와 같다.

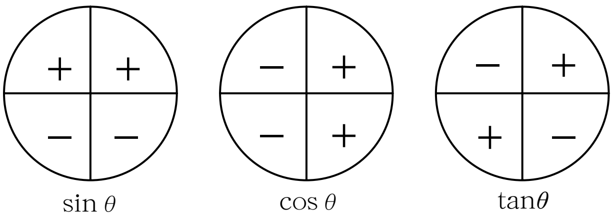


그림 3-5

례 1. $\sin 573°$, $\cos\left(-\frac{7}{3}\pi\right)$의 부호를 말하여라.

(풀이) $573° = 213° + 360°$이므로 이 각의 끝변은 3사분구에 놓인다.
따라서 $\sin 573°$의 부호는 $-$이다.
$-\frac{7}{3}\pi = -\frac{\pi}{3} - 2\pi$이므로 이 각의 끝변은 4사분구에 놓인다.
따라서 $\cos\left(-\frac{7}{3}\pi\right)$의 부호는 $+$이다.

례 2. 식 $-\frac{0.75\tan 125°}{\sin 850°}$의 값의 부호를 밝혀라.

(풀이) $\tan 125° < 0$ (125° 는 2사분구의 각이므로)
$\sin 850° = \sin(130° + 360°\cdot 2) > 0$ (850° 는2사분구의 각이므로)
따라서 $-\frac{0.75\tan 125°}{\sin 850°} > 0$ 즉 식의 값의 부호는 $+$이다.

문 제

1. 다음 삼각함수값의 부호를 말하여라.

1) $\sin170°$, $\sin\frac{5}{18}\pi$, $\sin329°$, $\sin753°$, $\sin5\pi$

$\sin1023°$, $\sin\left(-\frac{11}{6}\pi\right)$, $\sin(-635°)$

2) 우의 지적된 각들에 대한 코시누스, 탕겐스값들의 부호를 말하여라.

2. 다음 식의 값의 부호를 말하여라.

1) $2\sin\frac{56}{45}\pi\cos\frac{56}{45}\pi$　　2) $-0.3\tan\frac{23}{9}\pi\cot\frac{16}{9}\pi$

3) $\frac{\tan520°}{\sin195°}$　　4) $-\frac{0.5\cot172°}{\sin520°\cos510°}$

련습문제

1. 1) 다음의 도수를 라디안수로 고쳐라.

$50°\ 18'$, $40°\ 30'$, $-30°\ 22'$, $-18°\ 48'$

2) 다음의 라디안수를 도수로 고쳐라.

3, $\frac{2}{7}\pi$, -2.5π, $-\frac{4}{3}\pi$

2. 3각형의 세 아낙각의 비가 2:3:4이다. 매 각의 크기를 도수와 라디안수로 표시하여라.

3. 다음 각을 도수로 표시하고 $\alpha\in[0,\ 2\pi]$일 때 α의 값을 다 써라.(n은 자연수)

1) $\alpha=\frac{\pi}{4}+2\pi n$　　2) $\alpha=(-1)^n\frac{\pi}{3}+n\pi$

3) $\alpha=-\frac{\pi}{9}+\frac{5}{8}\pi n$　　4) $\alpha=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}n$

4. 원둘레를 15등분한 활등에 대한 중심각의 크기를 도수와 라디안수로 밝혀라.

5. 직경이 3.6cm인 금속바퀴가 1분동안에 600바퀴 돈다.

1) 바퀴의 임의의 점의 각속도 ω를 구하여라.(각속도는 단위시간동안에 돌아간 각이다.)

2) 축으로부터 1.2m 떨어진 곳에 있는 바퀴의 점의 선속도를 구하여라.(선속도는 단위시간동안에 이동한 거리이다.)

6. 다음 식의 값의 부호를 말하여라.

1) $\frac{240}{\tan 132°57'}$ 2) $-\frac{30.25}{\sin 638°25'}$

3) $\frac{\sin 323°30'}{\cot 440°15'}$ 4) $\frac{116\cos 130°40'}{\tan 360°20'}$

7. 다음 식을 계산하여라.

1) $\left(4\sin\frac{\pi}{4}\right)^2-\left(2\tan\frac{\pi}{6}\right)^2-\left(2\cos\frac{\pi}{6}\right)^2-\left(2\cot\frac{\pi}{4}\right)^2$

2) $\dfrac{4-\left(\tan\frac{\pi}{4}\right)^2-\left(\cot\frac{\pi}{4}\right)^4}{3\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)^3-4\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)^2+4\cot\frac{\pi}{4}}$

제2절. 삼각함수의 그라프

알아보기 다음것이 옳은가?

각 x의 끝변과 각 $x+2k\pi$의 끝변은 일치하므로 이 각들의 삼각함수값은 같다. 즉

$$\sin(x+2k\pi)=\sin x,\quad \cos(x+2k\pi)=\cos x$$

한편 전화공식으로부터

$$\tan(x+\pi)=\tan x,\quad \cot(x+\pi)=\cot x$$

이므로

$$\tan(x+k\pi)=\tan x,\quad \cot(x+k\pi)=\cot x$$

> 변수 x의 임의의 값에 대하여 정수 l이 있어서
>
> $$f(x\pm l)=f(x)$$
>
> 이면 함수 $f(x)$를 **주기함수**, l을 **주기**라고 부른다.
>
> 보통 주기 l은 웃식에 맞는 가장 작은 수를 택한다.

례. $\sin x$, $\cos x$는 2π를 주기로 하는 주기함수, $\tan x$, $\cot x$는 π를 주기로 하는 주기함수이다.

주기함수의 그라프는 주기만 한 크기의 변수구간에서 그린 그라프부분이 되풀이된것이다.

그러므로 한 주기구간에서 삼각함수의 그라프부분만 알면 그 삼각함수의 그라프는 다 알수 있다.

단위원둘레를 리용하면 자리표평면에서 점 $(x,\ \sin x)$를 쉽게 얻을수 있다.

각 x에 대응하는 점 x를 찍고 y축에 평행인 중심축에 $\sin x$를 찍는다. 이 점들을 지나며 자리표축에 평행인 직선들의 사귐점으로 점 $(x,\ \sin x)$를 얻는다.

이런 방법으로 함수 $y=\sin x$의 그라프를 다음과 같이 그린다.

① x축에 다음의 점들을 찍는다.

$$0,\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{4},\ \pi,\ \frac{5\pi}{4},\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{7\pi}{4},\ 2\pi$$

② y축에 평행인 원의 중심축에 시누스값을 표시하는 다음의 점들을 찍는다.

$$\sin 0,\ \sin\frac{\pi}{4},\ \sin\frac{\pi}{2},\ \cdots,\ \sin\frac{3\pi}{2},\ \sin\frac{7\pi}{4},\ \sin 2\pi$$

③ 이 점들에서 자리표축에 평행인 선들을 그어 사귐점들을 얻고 그 점들을 미끈하게 맺는다.

$$(0,\ \sin 0),\ \left(\frac{\pi}{4},\ \sin\frac{\pi}{4}\right),\ \left(\frac{\pi}{2},\ \sin\frac{\pi}{2}\right),\ \cdots,\ \left(\frac{3\pi}{2},\ \sin\frac{3\pi}{2}\right),$$

$$\left(\frac{7\pi}{4},\ \sin\frac{7\pi}{4}\right),\ (2\pi,\ \sin 2\pi)$$

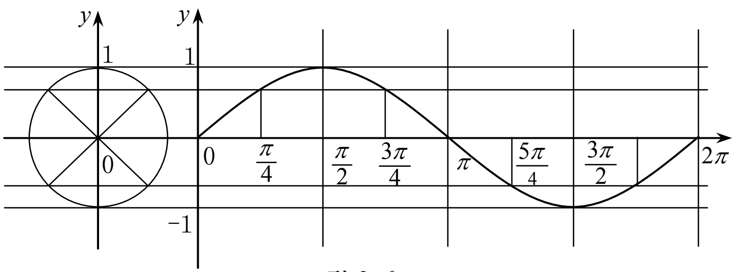


그림 3-6

이렇게 그린 그라프를 구간 $\cdots,\ [-2\pi,\ 0],\ [2\pi,\ 4\pi],\ [4\pi,\ 6\pi],\ \cdots$에서 되풀이하면 임의의 구간에서 $y=\sin x$의 그라프를 그릴수 있다.

함수 $y=\sin x$의 그라프에 의하여 이 함수의 성질을 알수 있다.

함수 $y=\sin x$의 성질

1) 뜻구역 $(-\infty,\ +\infty)$, 값구역 $[-1,\ 1]$
2) $x=k\pi$ (k :옹근수)일 때 함수값은 0이다.
3) 구간 $\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$에서 함수는 증가한다.
4) 구간 $\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \ \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)$에서 감소한다.
5) $y=\sin x$는 홀함수이다. 즉
   $\sin(-x)=-\sin x,\quad x\in \mathrm{R}$
6) $y=\sin x$는 주기함수이다.
   (주기는 2π 이다.)

문 제

1. 다음 함수의 그라프는 $y=\sin x$의 그라프에 어떤 변환을 해서 얻을수 있는가?
   1) $-y=\sin x$　　2) $y=\sin(-x)$　　3) $y=-\sin(-x)$
2. $y=\sin x$의 그라프를 다음과 같이 평행이동하였을 때 얻은 그라프를 식으로 표시하여라.
   1) x축의 방향으로 1만큼　　2) y축의 아래쪽으로 0.3만큼

알아보기 $y=\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$이다. $y=\cos x$의 그라프는 $y=\sin x$의 그라프를 어떻게 이동하여 얻을수 있는가?

$y=\cos x$의 그라프는 $y=\sin x$의 그라프를 x축의 부의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동하여 얻을수 있다.

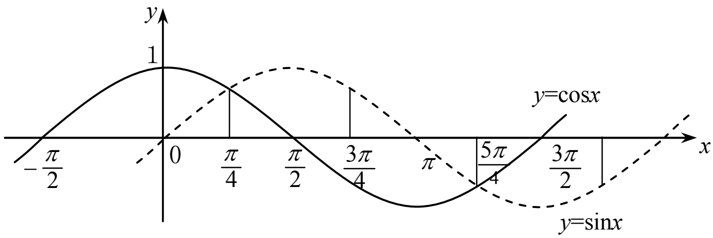


그림 3-7

문 제

1. $y=\cos x$ 는 어느 구간에서 증가하고 어느 구간에서 감소하는가?
2. $y=\cos x$ 는 어느 직선에 관하여 대칭인가?
3. $y=\cos x$ 의 주기를 말하여라.

알아보기 단위원둘레우의 점 M$(x,\ y)$ 에 대하여 $\dfrac{y}{x}$ 는 그 자리각의 탕겐스값이다. 그림 3-8에서와 같이 단위원둘레에서 x 축우에 놓이는 점 A를 지나는 접선 l 을 긋고 이 접선과 OM의 연장선이 사귀는 점을 T라고 하면

1) $\tan\theta=\dfrac{y}{x}=\mathrm{AT}$ 라고 말할수 있는가?

2) 그림 3-8에서는 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ 에서 $y=\tan x$ 의 그라프를 얻는 방법을 보여주고있다. 그 방법을 설명하여라.

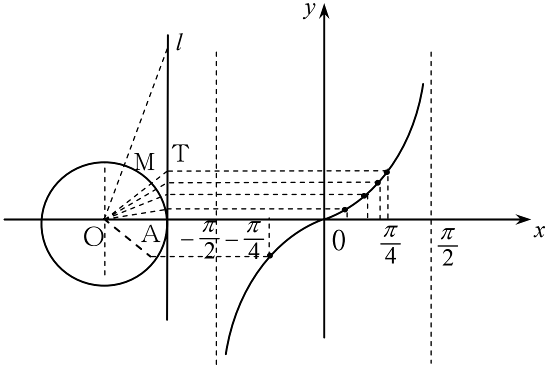


그림 3-8

함수 $y = \tan x$ 의 그라프는 다음과 같다.

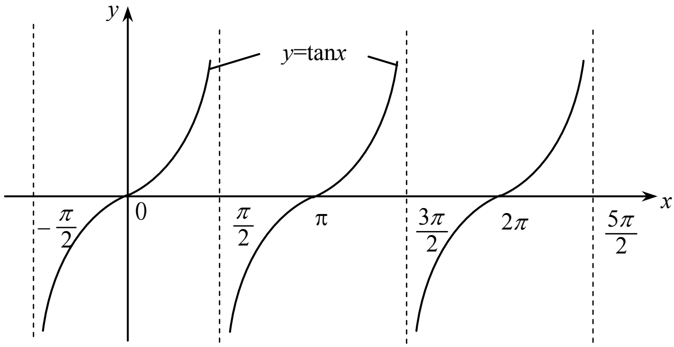


그림 3-9

함수 $y = \tan x$ 의 그라프에 의하여 이 함수의 성질을 알수 있다.

함수 $y = \tan x$ 의 성질

1) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathrm{Z})$ 일 때 뜻을 가지지 않는다.

2) $x = k\pi$ 일 때 함수값이 0이다.

3) 구간 $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi,\quad \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ 에서 증가한다.

4) 그라프는 원점에 관하여 대칭이다. 즉 $y = \tan x$ 는 홀함수이다.

5) π 를 주기로 하는 주기함수이다.

해보기 $y = \cot x = -\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ 이므로 $[-\pi\ ,\ \pi]$ 에서 함수 $y = \cot x$ 의 그라프는 $y = \tan x$ 의 그라프를 x 축방향으로 $-\frac{\pi}{2}$ 만큼 평행이동한 다음 y 축에 관하여 축대칭이동하면 얻어진다.

한 주기구간에서 $y = \cot x$ 의 그라프를 그려보아라.

함수 $y=\cot x$ 의 그라프는 그림 3-10과 같다.

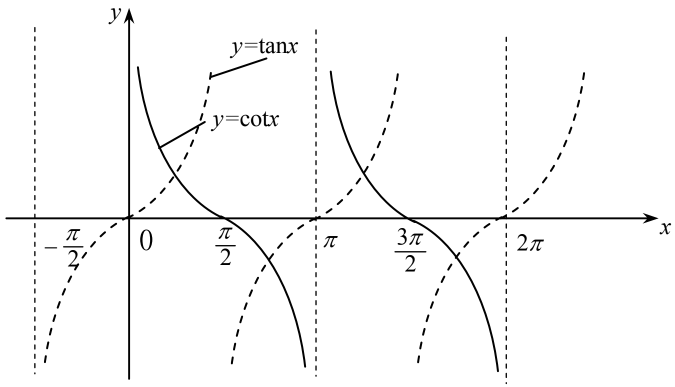


그림 3-10

함수 $y=\sin x$ 는 구간 $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$에서 서로 다른 함수값을 꼭 하나씩만 가진다.

따라서 이 구간에서 거꿀함수를 가진다. 이것을 $[-1,\ 1]$ 에서 정의된 **거꿀시누스함수**라고 부르고 $y=\arcsin x$ 로 표시한다. $\arcsin x$ 를 아크시누스 x 라고 읽는다.

마찬가지로 $y=\cos x$ 는 $[0,\ \pi]$ 에서, $y=\tan x$ 는 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ 에서, $y=\cot x$ 는 $(0,\ \pi)$ 에서 거꿀함수를 가지는데 이것들을 각각 $y=\arccos x$, $y=\arctan x$, $y=\operatorname{arc}\cot x$ 로 표시한다.

문 제

1. 다음 함수들의 그라프를 그려라.

   1) $y=\tan x+3$ 2) $y=\tan 2x$ 3) $y=\cot 3x$

2. $y=\cot x$ 는 어디서 증가하고 어디서 감소하는가?

련습문제

1. 다음 함수의 주기를 구하여라.

   1) $y=|\sin x|$ 2) $y=\cos\frac{2}{3}x$ 3) $y=3\tan 5x+4$

2. 구간 $[-2\pi,\ 2\pi]$에서 다음 함수들의 그라프를 그려라.

1) $y=|\sin x|$, $y=-1.5\sin x$, $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$

2) $y=|\cos x|$, $y=0.5\cos x$, $y=\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)$

3) $y=|\tan x|$, $y=2\tan x$, $y=\tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

3. 빗변 BC＝5 cm인 직3각형 ABC의 정점 A에서 빗변에 높이 AD를 긋고 밑점 D에서 직각변 AB에 내린 수직선분 DE를 긋는다. $BE=y$를 $\angle B=\theta$의 함수로 표시하고 이 함수 $y=f(\theta)$의 그라프를 대강 그려라.

4. 다음 함수의 그라프를 그려라.

1) $y=\sin x+\cos x$　　2) $y=\sin x-\cos x$

3) $y=\sin 2x+\cos 2x$　　4) $y=\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}$

5. 다음 함수의 최대값, 최소값을 구하여라.

1) $y=\sin 2x-\cos 2x$　　2) $y=\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}$

제3절. 삼각방정식

$\sin x+\frac{1}{2}=0$, $\sqrt{3}\cos x+\sin 2x=\frac{2}{3}$와 같이 삼각기호안에 변수가 들어있는 방정식을 **삼각방정식**이라고 부른다.

례 1. $\sqrt{2}\sin x+1=0$ ($0\le x\le 2\pi$)를 풀어라.

(풀이) $\sqrt{2}\sin x=-1$

$\therefore\ \sin x=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\ x=\frac{5\pi}{4},\ \ x=\frac{7\pi}{4}$

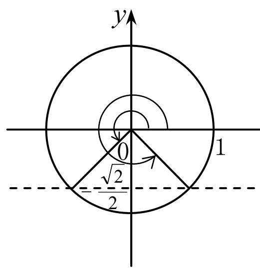


그림 3-11

례 2. $2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+1=0\ (0\le x\le 2\pi)$ 를 풀어라.

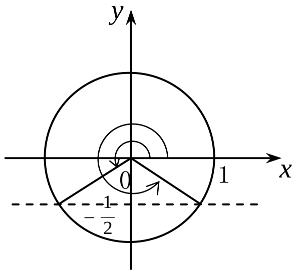


그림 3-12

(풀이) $2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-1$

$\therefore\ \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$

$\therefore\ x+\frac{\pi}{3}=\frac{7\pi}{6},\quad x+\frac{\pi}{3}=\frac{11\pi}{6}$

$\therefore\ x=\frac{5}{6}\pi,\quad x=\frac{9\pi}{6}$

그런데 $0\le x\le 2\pi$ 이므로

$$x=\frac{5}{6}\pi,\quad x=\frac{3\pi}{2}$$

문 제

1. 다음 삼각방정식을 풀어라. ($0\le x\le 2\pi$)

1) $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1$ 　　2) $2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+1=0$

2. 다음 삼각방정식을 풀어라. $(-\pi\le x\le \pi)$

1) $\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{1}{2}\right)=1$ 　　2) $6\cos(x-2)+3=0$

례 3. $2\cos 2x+1=0\ (0\le x\le 2\pi)$ 를 풀어라.

(풀이) $2\cos 2x=-1$

$\therefore\ \cos 2x=-\frac{1}{2}$

$2x=\mathrm{X}$ 로 놓으면 $\cos\mathrm{X}=-\frac{1}{2}$

$0\le \mathrm{X}\le 2\pi$ 라면

$$\mathrm{X}=\frac{2\pi}{3},\ \frac{4\pi}{3}$$

그런데 $0\le x\le 2\pi$ 이므로

$$0 \le 2x \le 4\pi$$

$\therefore \quad 2x = \dfrac{2\pi}{3}$ 이므로 $\quad x = \dfrac{\pi}{3}$

$2x = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi = \dfrac{8\pi}{3}$ 이므로

$$x = \frac{4\pi}{3}$$

$2x = \dfrac{4\pi}{3}$ 이므로 $\quad x = \dfrac{2\pi}{3}$

$2x = \dfrac{4\pi}{3} + 2\pi = \dfrac{10\pi}{3}$ 이므로 $\quad x = \dfrac{5\pi}{3}$

$\therefore \quad x = \dfrac{\pi}{3}, \quad \dfrac{2\pi}{3}, \quad \dfrac{4\pi}{3}, \quad \dfrac{5\pi}{3}$

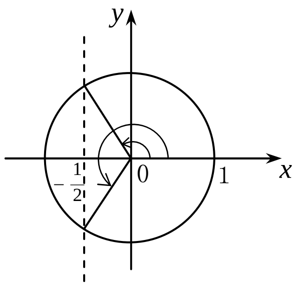


그림 3-13

례 4. $\tan 2x = \sqrt{3} \ (-\pi \le x \le \pi)$ 를 풀어라.

(풀이) $\tan 2x = \sqrt{3}$

$2x = \mathrm{X}$ 로 놓으면

$$\tan \mathrm{X} = \sqrt{3}$$

$-\pi \le x \le \pi$ 이므로

$$-2\pi \le \mathrm{X} \le 2\pi$$

$\therefore \quad \mathrm{X} = \dfrac{\pi}{3}, \quad \dfrac{4}{3}\pi, \quad -\dfrac{2}{3}\pi, \quad -\dfrac{5}{3}\pi$

$\therefore \quad x = \dfrac{\pi}{6}, \quad \dfrac{2}{3}\pi, \quad -\dfrac{\pi}{3}, \quad -\dfrac{5}{6}\pi$

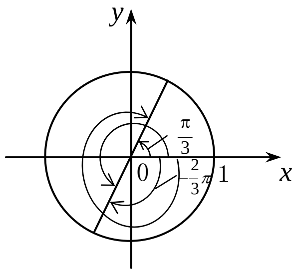


그림 3-14

례 5. $2\cos^2 x = 1 + \cos x \ (0 \le x \le 2\pi)$ 를 풀어라.

(풀이) $2\cos^2 x = 1 + \cos x$

$\therefore \quad 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$

$\therefore \quad (2\cos x + 1)(\cos x - 1) = 0$

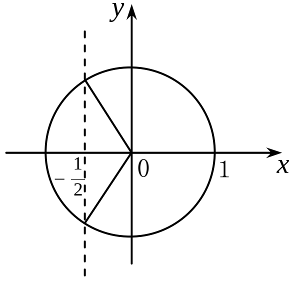


그림 3-15

$$\therefore \quad \cos x = -\frac{1}{2}, \quad \cos x = 1$$

$$\therefore \quad x = 0, \quad \frac{2\pi}{3}, \quad \frac{4\pi}{3}, \quad 2\pi$$

문 제

1. 다음 삼각방정식을 풀어라. ($0 \le x \le 2\pi$)

1) $\sin 2x + 1 = 0$ 2) $\tan 3x = -1$

3) $\sqrt{2}\cos 2x + 1 = 0$

2. 다음 삼각방정식을 풀어라. ($0 \le x \le 2\pi$)

1) $3\sin 3x + 2 = 0$ 2) $\tan^2 2x = 3$

3. 다음 삼각방정식을 풀어라. ($0 \le x \le 2\pi$)

1) $2\cos^2 x + \cos x = 0$ 2) $2\cos x^2 + 3\cos x = 2$

3) $2\sin^2 x + \sin x = 1$

련습문제

1. 다음 삼각방정식을 풀어라. ($0 \le x \le 2\pi$)

1) $4\sin^2 x - 3 = 0$ 2) $\sqrt{3}\tan(x-1) = 1$

3) $4\cos^2(x+2) - 3 = 0$

2. 다음 삼각방정식을 풀어라. ($-\pi \le x \le \pi$)

1) $2\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 1$ 2) $\tan^2 2x = 3$

3. 다음 삼각방정식을 풀어라. ($0 \le x \le 2\pi$)

1) $\sin^2 x = \sin x$ 2) $2\cos^2 x - 4\cos x + 2 = 0$

3) $\cos 2x = \cos x$ 4) $\cos^2 x + \sin x = -1$

4. 다음 방정식을 풀어라.（$0 \le x \le 2\pi$）

1） $\sin 6x = \sin 5x$ 　　2） $\cos^2 x - \sin^2 x = \sin x$

3） $\cot 2x = \tan 3x$ 　　4） $\sin^2 x + \cos x + 1 = 0$

5） $\sin^2 x - \sin x = \sin^2 \frac{\pi}{6}$ 　　6） $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$

복습문제

1. 다음과 같은 각의 도수와 라디안수를 구하여라.

1）원에 내접한 바른 n 각형의 한 아낙각과 아낙각들의 합

2）1분에 750바퀴 도는 치차가 1초에 도는 회전각

2. 다음 삼각함수값을 구하여라.

1） $\sin 210°$ 　　2） $\cos(-45°)$

3） $\tan 750°$ 　　4） $\cot(-135°)$

3. 다음 식을 간단히 하여라.

1） $\dfrac{\cos(-\alpha)\sin(90° - \alpha)\tan(540° - \alpha)}{\sin(-\alpha)\cos(\alpha - 270°)\cot(180° - \alpha)}$

2） $\dfrac{\sin(\pi + x)\tan^2(\pi - x)}{\cos(\frac{3}{2}\pi + x)} - \dfrac{\sin(\frac{3}{2}\pi - x)\sec^2(\pi - x)}{\sin(\frac{\pi}{2} + x)}$

4. 부채형의 둘레가 그 원의 반원둘레와 같다면 그 부채형의 중심각은 얼마인가? 또한 그 원의 반경을 r 라고 할 때 부채형의 면적을 구하여라.

5. 반경이 r, $r'(r < r')$ 인 동심원의 활등들과 중심각 α 를 나타내는 두 반경으로 둘러막힌 부분의 면적을 구하여라.

6. $\cos(-100°) = k$ 일 때 $\tan 80°$ 를 k 로 표시하여라.

7. α 가 3사분구각이고 $\tan\alpha = \frac{3}{4}$ 일 때 $\sin\alpha + \cos\alpha$ 의 값을 구하여라.

8. 다음 함수의 그라프를 그려라.

1) $y=2\sin\frac{x}{2}$, $y=2\sin\left(\frac{x}{2}+60°\right)$

2) $y=\frac{1}{2}\cos 3x$, $y=\frac{1}{2}\cos(3x-120°)+1$

9. $\tan(\alpha+\beta)=-4.3$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\pi<\beta<\frac{3}{2}\pi$ 를 알고 $\alpha+\beta$ 의 삼각함수값을 구하여라.

10. 다음 함수들의 그라프를 그려라.

1) $y=\sin(2x+1)$

2) $y=\cos|x|$, $y=\cos(3x-\pi)+1$

3) $y=|\tan x|$, $y=\tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$

11. 다음 삼각방정식을 풀어라. ($-\pi\le x\le\pi$)

1) $\sqrt{3}\tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=1$　　2) $\cos(x-2)+0.5=0$

3) $2\sin\frac{x}{2}=1$

12. 다음 삼각방정식을 풀어라. ($0\le x\le 2\pi$)

1) $\sin 2x=2\cos x$　　2) $\cos 2x=\sin x$

제4장. 복소수

제1절. 복소수

1. 복소수의 의미

실수모임에서 2차방정식 $x^2+4=0$ 은 풀이를 가지지 않는다.

$$x^2+a^2=0 \quad \text{즉} \quad x^2=-a^2$$

모양의 방정식까지도 풀이를 가지게 하자면 2제곱한것이 부수로 되는 새로운 《수》를 받아들여야 한다.

$$\boxed{i^2=-1}$$

즉 2제곱하면 -1로 되는 새로운 수 i를 받아들여 그것을 허수단위라고 부른다.

i의 제곱을 실수에서와 같이 생각하면

$$i^0=1$$
$$i^1=i$$
$$i^2=-1$$
$$i^3=i^2\cdot i=(-1)\cdot i=-i$$
$$i^4=i^3\cdot i=(-i)\cdot i=-i^2=-(-1)=1$$
$$i^5=i^4\cdot i=1\cdot i=i$$
$$i^6=i^5\cdot i=i\cdot i=i^2=-1$$
$$i^7=i^6\cdot i=(-1)\cdot i=-i$$

....

일반적으로

$$i^n=\begin{cases}1, & n=4k\\ i, & n=4k+1\\ -1, & n=4k+2\\ -i, & n=4k+3\end{cases} \qquad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots)$$

례 1. $i^{32}=i^{4\cdot 8}=1$

$i^{-25}=i^{-28+3}=i^{3}=-i$

례 2. 방정식 $x^2+9=0$ 을 풀어라.

(풀이) $x^2+9=0$ 즉 $x^2=-9$

그런데

$(3i)^2=9\cdot i^2=-9$

$(-3i)^2=9\cdot i^2=-9$

이므로 주어진 방정식의 풀이는 $3i$ 와 $-3i$ 이다.

례 3. 방정식 $x^2+3=0$ 을 풀어라.

(풀이) $x^2=-3$

그런데 $(\sqrt{3}\,i)^2=(\sqrt{3})^2\cdot i^2=-3$

$(-\sqrt{3}\,i)^2=(-\sqrt{3})^2\cdot i^2=-3$

이므로 주어진 방정식의 풀이는 $\sqrt{3}\,i$ 와 $-\sqrt{3}\,i$ 이다.

실수의 테두리에서는 부수의 2차뿌리는 없다고 하였다.

그러나 새로운 수 i 를 쓰면 -9의 2차뿌리는 $3i$ 와 $-3i$, -3의 2차뿌리는 $\sqrt{3}\,i$ 와 $-\sqrt{3}\,i$, -1의 2차뿌리는 i 와 $-i$ 이다.

문 제

1. 다음 수들의 2 차뿌리를 i 를 써서 표시하여라.

1) $-81=\sqrt{|-81|}\,i=9i,\ -\sqrt{|-81|}\,i=-9i$

2) -0.25 3) $-\dfrac{2}{9}$ 4) $-\dfrac{9}{36}$

2. 다음 방정식을 풀어라.

1) $x^2+144=0$ 2) $4x^2+13=0$ 3) $x^2+\dfrac{3}{49}=0$

4) $4x^2+16=0$ 5) $9x^2+81=0$ 6) $x^3-x^2+x-1=0$

해보기 2차방정식 $x^2-4x+20=0$ 을 풀어보아라. 풀이를 어떤 모양으로 표시할수 있는가?

$(x-a)^2+b=0$ $(b>0)$ 모양의 2차방정식이 풀이를 가지도록 하자면 $a\pm bi$ 모양의 새로운 수가 있어야 한다.

$$\alpha = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{bi}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\in \mathrm{R})$$

모양의 수를 **복소수**라고 부른다. 이때 a와 b를 각각 α의 **실수부, 허수부**라고 부르고 다음과 같이 표시한다.

$$a=\mathrm{Re}\,\alpha\ ,\ b=\mathrm{Im}\,\alpha$$

$b=0$인 복소수 $a+0i$는 실수 a와 같다고 본다.

$b\neq 0$인 복소수 $a+bi$는 실수가 아니다. 이러한 복소수를 **허수**라고 부른다. 특히 $a=0$이고 $b\neq 0$인 복소수 $0+bi$를 **순허수**라고 부른다.

복소수 $(a+bi)$
- 실수$(b=0)$
- 허수$(b\neq 0)$
  - 순허수$(a=0)$
  - 그밖의 허수$(a\neq 0)$

두 복소수에서 실수부와 허수부가 각각 같으면 그 **두 복소수는 같다**고 말하고 같기기호 <=>로 표시한다.

$$a+bi=c+di \Leftrightarrow a=c,\ b=d$$

그러므로 실수부나 허수부가운데 어느 하나라도 같지 않으면 두 복소수는 같지 않다.

복소수는 서로 다른 글자 α, β, γ, … 등으로 표시하여 구별한다.

복소수에서는 실수에서와 같은 크기관계를 생각하지 않는다.

유리수모임을 Q, 실수모임을 R, 복소수모임을 C로 표시하면

$$\mathrm{Q}\subset\mathrm{R}\subset\mathrm{C}$$

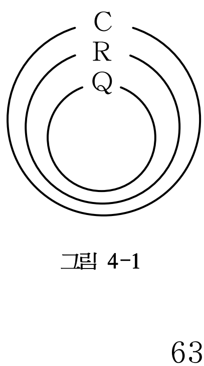


그림 4-1

문 제

1. 다음의 명제에서 옳은것과 옳지 않은것을 갈라내여라.

1) 수 1과 수 i의 크기는 같다.

2) 실수 a, b에 대하여 $a=0$ 이면 $a+bi$는 순허수이다.

3) $a+bi=c+di$ 이면 $a=c$, $b=d$ 이다.

2. 다음 복소수의 실수부와 허수부를 갈라보아라.

1) $\alpha=2+3i$　　　　2) $\alpha=1+i$

3) $\alpha=4\frac{1}{2}i$　　　　4) $\alpha=-\frac{1}{2}i$

3. 다음 복소수들에서 실수, 허수, 순허수를 갈라보아라.

$3+0.5i$, -6, $-\frac{5}{2}+\frac{2}{5}i$, $0.12i$, $1\frac{2}{3}$, $-7i$

4. 실수 m이 어떤 값을 가질 때 복소수 $z=m^2-5m+6+(m^2-m-2)i$가

1) 실수　　　2) 허수　　　3) 순허수

이겠는가?

2. 실수결수2차방정식의 풀이

알아보기 결수가 실수인 2차방정식 $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq 0$, a, b, $c\in\mathrm{R}$)은 복소수모임 C에서 늘 풀이를 가지는가? 그 풀이를 어떻게 표시할수 있는가?

판별식	풀이의 개수	풀이모임
$\mathrm{D}>0$	서로 다른 실수풀이	$\{-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\mathrm{D}}}{2a},\ -\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\mathrm{D}}}{2a}\}$
$\mathrm{D}=0$	한개의 실수풀이(겹풀이)	$\{-\frac{b}{2a}\}$
$\mathrm{D}<0$	서로 다른 두개의 허수풀이	$\{-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\lvert\mathrm{D}\rvert}}{2a}i,\ -\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\lvert\mathrm{D}\rvert}}{2a}i\}$

(여기서 $\mathrm{D}=b^2-4ac$)

복소수모임에서 실수결수2차방정식은 늘 풀이를 가진다.

례. 다음 방정식의 풀이를 판별하고 풀어라.

$$x^2 - 2x + 5 = 0$$

(풀이) $D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16 < 0$

이므로 방정식은 두개의 허수풀이를 가진다.

이 방정식을 풀면

$$x_{1,\ 2} = 1 \pm \frac{\sqrt{|-16|}}{2} i = 1 \pm 2i$$

따라서 풀이모임은 $\{1+2i,\ 1-2i\}$

복소수 $\alpha = a + bi$ 에서 허수부의 부호를 반대로 바꾼 복소수 $a - bi$ 를 α 의 **공액복소수**라고 부르고 $\overline{\alpha}$ 로 표시한다.

$$\overline{\alpha} = \overline{a + bi} = a - bi$$

이때 $\overline{a - bi} = \overline{a + (-b)i} = a - (-b)i = a + bi$ 이므로 α 와 $\overline{\alpha}$ 는 서로 공액인 복소수이다.

문 제

1. 다음 방정식을 풀어라.

1) $(x-1)^2 + 16 = 0$　　2) $(x-3)^2 + 25 = 0$

3) $x^2 + 2x + 5 = 0$　　4) $x^2 - x + 1 = 0$

2. 다음 2차방정식의 풀이를 판별하고 풀어라.

1) $2x^2 - x - 1 = 0$　　2) $x^2 + 2\sqrt{3}\,x + 3 = 0$

3) $x^2 - 6x + 10 = 0$　　4) $4x^2 + 3x - 5 = 0$

3. 다음것을 증명하여라.

$$(\overline{\overline{a + bi}}) = a + bi$$

4. $\alpha = \overline{\alpha}$ 이면 복소수 α 는 실수라는것을 밝혀라.

련습문제

1. 다음 식을 계산하여라.

1) $i^{-28}+i^{42}$ 2) $i^{125}-(-i^{27})+i^{64}$

3) $i^{17}-(-i)^{-44}+(-i)^{86}$

2. 다음 수들의 2차뿌리를 i를 써서 표시하여라.

1) -225 2) $-\frac{4}{9}$ 3) -13 4) $-\frac{5}{11}$

3. 다음 방정식을 풀어라.

1) $x^2+7=0$ 2) $2x^2+6=0$

3) $-5x^2-25=0$ 4) $13x^2+3=0$

4. 다음 복소수의 공액복소수를 말하고 서로 공액인 두 복소수를 풀이로 가지는 2차방정식을 만들어라.

1) $1-i$ 2) $2+3i$ 3) $-2+i$ 4) $-1-2i$

5. 다음 방정식의 풀이를 판별하고 풀어라.

1) $x^2-x-2=0$ 2) $x^2-2x+3=0$

3) $2x^2+x+1=0$ 4) $3x^2+5x+3=0$

6. 방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 풀이가 $2+i$이다. a, b를 결정하여라.

제2절. 복소수의 산법

1. 복소수의 더하기와 덜기

알아보기 실수모임에서의 식의 계산규칙에 따라 다음것을 계산해보아라.

1) $(2+3i)+(-6+2i)$ 2) $(a+bi)+(c+di)$

복소수 $\alpha=a+bi$와 $\beta=c+di$의 더하기를 다음과 같이 정의한다.

$$\alpha+\beta=(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$

복소수의 더하기는 실수부는 실수부끼리, 허수부는 허수부끼리 더하면 된다.

복소수 $a+bi$는 두 복소수 $a+0i$와 $0+bi$의 합으로 볼수 있다.
복소수의 더하기에서도 바꿈법칙과 묶음법칙이 성립한다.

$\alpha+\beta=\beta+\alpha$	(바꿈법칙)
$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$	(묶음법칙)

례 1. $(7+3i)+(2-i)=(7+2)+(3-1)i=9+2i$

$(5-0.5i)+(-0.5+4i)=(5-0.5)+(-0.5+4)i$
$=4.5+3.5i$

례 2. $5+(-12+i)+6=(5+6)+(-12+i)=11+(-12+i)$
$=(11-12)+i=-1+i$

$(4+i)+(5-2i)+(1+2i)$
$=[(4+i)+(5-2i)]+(1+2i)$
$=(9-i)+(1+2i)=10+i$

문 제

1. 복소수의 더하기에서 바꿈법칙이 성립한다는것을 증명하여라.
2. 복소수의 더하기에서 묶음법칙이 성립한다는것을 증명하여라.
3. 다음것을 계산하여라.

1) $\frac{1}{2}i+(4-5i)+i$　　2) $(3-2i)+(3+2i)+(2-3i)+(2+3i)$

4. 다음 식에 맞는 a, b를 구하여라.

1) $(a+3i)+(0.5-bi)=3-5i$　　2) $(7-bi)+(a-i)=4-2i$

3) $-7i+(a-bi)+4\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}i\right)=i$

복소수의 덜기는 다음과 같이 정의한다.
두 복소수 $\alpha=a+bi$, $\beta=c+di$에 대해서

$$(c+di)+(x+yi)=a+bi$$

에 맞는 복소수 $z=x+yi$를 복소수 $\alpha=a+bi$에서 $\beta=c+di$를 던 **차**라고 부르고 다음과 같이 표시한다.

$$z = \alpha + \beta$$

차의 정의로부터

$$(c + x) + (d + y)i = a + bi$$

$$c + x = a, \quad d + y = b$$

이로부터

$$x = a - c, \quad y = b - d$$

이리하여 두 복소수의 차는 다음과 같다.

$$\boxed{\alpha - \beta = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i}$$

례 3. $(1+2i)-(3-2i)=(1-3)+(2-(-2))i$

$$=-2+4i$$

$$(-9+3i)-\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{3}i\right)=\left(-9-\frac{1}{3}\right)+\left(3+\frac{2}{3}\right)i$$

$$=-9\frac{1}{3}+3\frac{2}{3}i$$

$\alpha = a + bi$ 일 때

$$0-\alpha=(0+0i)-(a+bi)=-a-bi$$

를 간단히 $-\alpha$ 로 표시하면

$$\alpha+(-\alpha)=(-\alpha)+\alpha=0$$

이라는것을 곧 알수 있다.

복소수 $-\alpha$ 를 복소수 α 의 **반대수**라고 부른다.

례 4. 1) $-5+2i$ 의 반대수는 $5-2i$

2) $7-\frac{1}{3}i$ 의 반대수는 $-7+\frac{1}{3}i$

복소수를 덜 때에는 그 반대수를 더하면 된다. 즉

$$\boxed{\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)}$$

례 5. 1) $(3-5i)-(-5+6i)=(3-5i)+(5-6i)$
$=8-11i$

2) $-2i-(2-8i)=-2i+(-2+8i)=-2+6i$

문 제

1. 다음것을 계산하여라.

1) $2i-(-2+3i)+(6-7i)$

2) $-0.75-\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i\right)-\left(-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}i\right)-\left(\frac{1}{6}-\frac{5}{6}i\right)$

2. 다음 식에 맞는 a, b를 구하여라.

1) $-7i-(a-bi)+4+\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}i\right)=i$

2) $(-7+ai)-\left(-b+\frac{1}{2}i\right)=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}i$

3) $(-1-0.5i)-(a+bi)+i=-0.7-1.5i$

3. $z_1=3-5i$, $z_2=-3+2i$일 때 다음 식을 만족시키는 복소수 z를 구하여라.

1) $z_1+z=z_2$　　2) $z-z_1=z_2$　　3) $z_1-z=z_2$

4. $z=a+bi$일 때 다음것을 밝혀라.

1) $z+\bar{z}=2a$　　2) $z-\bar{z}=2bi$

5. 임의의 복소수 z에 대하여 다음것을 밝혀라.

$\mathrm{Re}z=\frac{z+\bar{z}}{2}$,　　$\mathrm{Im}z=-\frac{z-\bar{z}}{2}i$

2. 복소수의 곱하기와 나누기

해보기 실수모임에서의 식의 계산규칙에 따라 다음것을 계산해보아라.

1) $(2+3i)\cdot(-4+5i)$　　2) $(a+bi)\cdot(c+di)$

복소수 $\alpha=a+bi$와 $\beta=c+di$의 곱하기를 다음과 같이 정의한다.

$$\alpha\cdot\beta=(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

례 1. 1) $(2-i)\cdot(5+2i)=[2\cdot5-(-1)\cdot2]+[2\cdot2+(-1)\cdot5]i=12-i$

2) $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\dfrac{1+2\sqrt{3}i-3}{4}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

복소수의 곱하기에서도 실수모임에서의 곱하기와 같이 바꿈법칙, 묶음법칙, 분배법칙이 성립한다.

$\alpha\beta=\beta\alpha$	(바꿈법칙)
$(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma)$	(묶음법칙)
$(\alpha+\beta)\gamma=\alpha\gamma+\beta\gamma$	(분배법칙)

례 2. 1) $(1+i)(3-5i)(1-i)=[(1+i)(1-i)]\cdot(3-5i)$

$=2\cdot(3-5i)=6-10i$

2) $(1-3i)(-i)=-i+3i^2=-3-i$

문 제

1. 복소수의 곱하기에서 바꿈법칙과 묶음법칙이 성립한다는것을 증명하여라.

2. 복소수에서 더하기와 곱하기에 관한 분배법칙이 성립한다는것을 증명하여라.

3. 다음 식에 맞는 a, b를 구하여라.

1) $(a-bi)(2-3bi)=1-5i$ 2) $(5-i)(a+bi)=2i$

3) $(a+3i)(1-bi)=1-i$

4. $z=a+bi$일 때 $z\cdot\overline{z}=a^2+b^2$이라는것을 밝혀라.

복소수의 나누기는 다음과 같이 정의한다.

두 복소수 $\alpha=a+bi,\ \beta=c+di(\neq0)$에 대해서

$$(c+di)(x+yi)=a+bi$$

에 맞는 복소수 $z=x+yi$를 $\alpha=a+bi$를 $\beta=c+di$로 나눈 **상**이라고 부르고 다음과 같이 표시한다.

$$z=\frac{\alpha}{\beta}$$

상의 정의로부터

$$(cx-dy)+(cy+dx)i=a+bi$$

$$\left.\begin{aligned}cx-dy=a\\cy+dx=b\end{aligned}\right\}$$

이것을 풀면

$$x=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \quad y=\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

이리하여 두 복소수의 상은 다음과 같다.

$$\boxed{\frac{\alpha}{\beta}=\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i}$$

례 3. 1) $\frac{1+2i}{3+4i}=\frac{1\cdot3+2\cdot4}{3^2+4^2}+\frac{2\cdot3-1\cdot4}{3^2+4^2}i=\frac{11}{25}+\frac{2}{25}i$

2) $\frac{2+3i}{3-4i}=\frac{2\cdot3-3\cdot4}{3^2+(-4)^2}+\frac{3\cdot3+2\cdot4}{3^2+(-4)^2}i=-\frac{6}{25}+\frac{17}{25}i$

$\alpha=a+bi(\neq0)$ 일 때 복소수 $\frac{1}{\alpha}$ 을 복소수 α 의 **거꿀수**라고 부른다.

$$\alpha\cdot\overline{\alpha}=(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2+b^2$$

이므로 복소수 α 의 거꿀수는 다음과 같다.

$$\boxed{\frac{1}{\alpha}=\frac{\overline{\alpha}}{\alpha\,\overline{\alpha}}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}}$$

례 4. 1) $3+2i$ 의 거꿀수는 $\frac{1}{3+2i}=\frac{3-2i}{3^2+2^2}=\frac{3}{13}-\frac{2}{13}i$

2) i 의 거꿀수는 $\frac{1}{i}=\frac{-i}{1^2}=-i$

복소수를 나눌 때에는 그 거꿀수를 곱하면 된다. 즉

$$\boxed{\frac{\alpha}{\beta}=\alpha\,\frac{1}{\beta}\quad(\beta\neq0)}$$

복소수에서도 0 으로의 나누기는 할수 없다.

례 5. 1) $\dfrac{3-5i}{1+2i}=(3-5i)\cdot\dfrac{1}{1+2i}=(3-5i)\cdot\dfrac{1-2i}{5}$

$$=\frac{-7-11i}{5}=-\frac{7}{5}-\frac{11}{5}i$$

2) $\dfrac{3-5i}{-5+6i}=(3-5i)\cdot\dfrac{1}{-5+6i}=(3-5i)\cdot\dfrac{-5-6i}{61}$

$$=\frac{(-15-30)+(-18+25)i}{61}=-\frac{45}{61}+\frac{7}{61}i$$

문 제

1. 다음것을 계산하여라.

1) $\dfrac{-5+3i}{2i}$ 2) $\dfrac{1-i}{1+i}$ 3) $\dfrac{-3+2i}{2-i}$

2. 다음 식에 맞는 a, b 를 구하여라.

1) $\dfrac{3-bi}{a+i}=i$ 2) $\dfrac{1-2i}{2a-3b}=1+2i$

3. 다음것을 계산하여라.

1) $\left(\dfrac{1}{10}+\dfrac{2}{5}i\right)-\dfrac{3-i}{1-3i}$ 2) $\dfrac{-1+\sqrt{2}i}{3i}\cdot\dfrac{4}{1+\sqrt{6}i}$

4. 다음 같기식을 증명하여라.

1) $\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$ 2) $\overline{\alpha-\beta}=\overline{\alpha}-\overline{\beta}$

3) $\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta}$ 4) $\overline{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)}=\dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$ $(\beta\neq 0)$

련습문제

1. 다음것을 계산하여라.

1) $\left(2\dfrac{3}{4}-1\dfrac{1}{2}i\right)+\left(1\dfrac{3}{4}+3\dfrac{1}{2}i\right)-\left(3-2\dfrac{1}{2}i\right)$

2) $(a+bi)+(5a+8bi)-(-4a-7bi)$

3) $[(x+yi)+(3x-2yi)]-[(-x-yi)-(5x-4yi)]$

2. 다음 식에 맞는 실수 x, y를 구하여라.

1) $-3-5i=2(x-1)+3(y-2)i$　　2) $3+4xi+5yi=12i+5x-2y$

3) $(1+i)x+2(2+i)y=1+3i$　　4) $2ax-3(b-4i)y=2a-4bi$

3. 다음것을 계산하여라.

1) $5i(-7i)$　　2) $(-7-8i)(-3i)$

3) $\left(2^{\frac{1}{2}}-i\right)\left(3^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{1}{2}}i\right)$　　4) $(-0.1+5i)(-0.1-5i)$

5) $\dfrac{5-i\sqrt{2}}{1+i\sqrt{2}}$　　6) $\dfrac{2i-1}{i-1}$

7) $\left(3-\sqrt{2}i\right)^2$　　8) $\left(\dfrac{-1+2\sqrt{2}i}{2}\right)^2$

4. 합이 4이고 적이 $7+4i$로 되는 두개의 복소수를 구하여라.

5. $\alpha=1+\sqrt{3}i$ 일 때 $\dfrac{(2+\alpha)^2}{\alpha^3}$ 을 구하여라.

제3절. 복소수평면

1. 복소수평면

실수 a가 수축의 점 M(a)와 1대1로 대응되는것과 같이 복소수 $\alpha=a+bi$는 자리표평면의 점 M(a, b)와 1대 1로 대응된다.

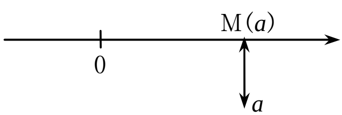


그림 4-2

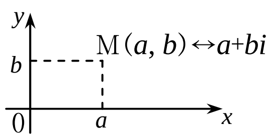


그림 4-3

해보기 1) 다음의 복소수를 자리표평면의 점으로 표시하여라.

$2-3i$, $-3+0.5i$, $2i$, -3.5

2) 다음의 점에는 어떤 복소수가 대응하는가?

M(3,2), N(−1, 3), P(0, 2), Q(−3, 0)

복소수는 자리표평면의 점으로, 자리표평면의 점은 복소수로 표시할수 있다.

자리표평면의 점을 복소수로 볼 때 이 평면을 **복소수평면** 또는 **가우스평면**이라고 부른다.

복소수평면에서 실수는 x축의 점으로, 순허수는 y축의 점으로 표시된다. 그러므로 x축을 **실축**, y축을 **허축**이라고 부른다. 점 O를 **원점**이라고 부른다.

앞으로 복소수 α라는 말과 점 α라는 말은 같은것으로 보기로 한다.

복소수 $\alpha=a+bi$는 또한 자리표평면에서 이 복소수를 표시하는 점 α를 끝점, 원점 O를 첫점으로 하는 벡토르와 1대 1로 대응시킬수 있다.

복소수 $\alpha=a+bi$에 대응하는 벡토르를 복소수 α의 **동경벡토르**라고 부른다.

점 α와 원점사이의 거리 즉 복소수 $\alpha=a+bi$의 동경벡토르의 길이를 피다고라스의 정리에 의하여 구하면

$$\sqrt{a^2+b^2}$$

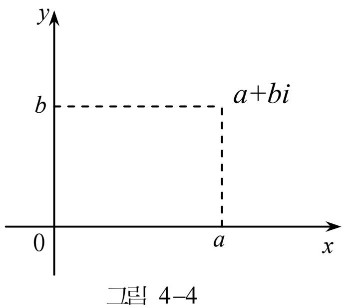


그림 4-4

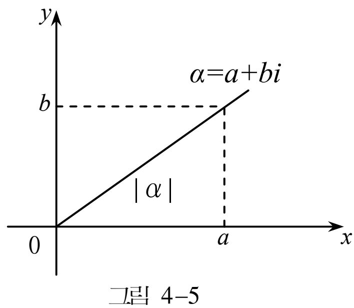


그림 4-5

복소수 $\alpha=a+bi$에 대하여 수 $\sqrt{a^2+b^2}$을 복소수 α의 **절대값**이라고 부르고 $|\alpha|$와 같이 표시한다. 즉

$$|\alpha|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$$

령 아닌 복소수 $\alpha = a + bi$ 의 동경벡토르가 x 축의 정방향과 이루는 각 θ 를 복소수 α 의 **편각**이라고 부르고 $\arg\alpha$ 와 같이 표시한다.

$$\arg\alpha = \arg(a + bi) = \theta$$

례. 1) α 가 정의 실수이면

$$\arg\alpha = 0$$

2) α 의 허수부가 정인 순허수이면

$$\arg\alpha = \frac{\pi}{2}$$

3) α 의 허수부가 부인 순허수이면

$$\arg\alpha = -\frac{\pi}{2}$$

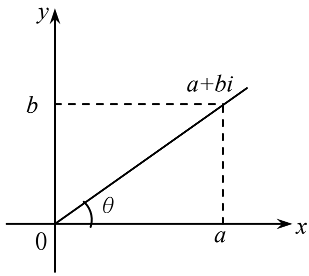


그림 4–6

복소수 $0 = 0 + 0i$ 에 대해서는 편각을 생각하지 않는다. 따라서 복소수 $\alpha = 0$ 은 절대값만으로 정해진다.

문 제

1. 다음 복소수의 절대값을 구하여라.

1) $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$　　2) $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

3) $4i$　　4) $-4i$

2. 다음 복소수의 편각을 구하여라.

1) $-6i$　　2) 0.25　　3) $\frac{11}{10}i$

4) $1 + i$　　5) $1 - i$

3. 실수의 절대값과 이 실수를 복소수로 보고 계산한 절대값이 서로 같다는것을 밝혀라.

4. 그림을 그려서 $|a + bi| = |a - bi|$ 라는것을 설명하여라.

2. 복소수의 삼각형식

복소수 $\alpha=a+bi$의 절대값을 r, 편각을 θ라고 하자.

그림 4-7에서 곧 알수 있는바와 같이

$$a=r\cos\theta,\quad b=r\sin\theta$$

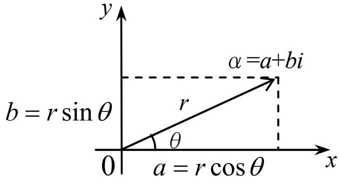


그림 4-7

따라서 복소수 $\alpha=a+bi$를 다음과 같이 표시할수 있다.

$$\boxed{\alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta)}$$

이것을 복소수 α의 **삼각형식** 또는 **극형식**이라고 부른다. 그리고 $a+bi$를 α의 **대수형식**이라고 부른다.

대수형식의 복소수를 삼각형식으로 고치려면

$$r=\sqrt{a^2+b^2},\quad \cos\theta=\frac{a}{r},\quad \sin\theta=\frac{b}{r}$$

에 의하여 절대값 r와 편각 θ를 정하면 된다.

례 1. 복소수 $1+i$를 삼각형식으로 고쳐라.

(풀이) $1+i$의 절대값은

$$r=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$$

편각은

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \theta=\frac{\pi}{4}$$

따라서 $1+i$를 삼각형식으로 고치면

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

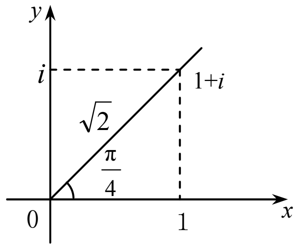


그림 4-8

례 2. 순허수 i를 삼각형식으로 고쳐라.

(풀이) i의 절대값은 $r=1$이고

편각은 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$

따라서 i를 삼각형식으로 고치면

$$i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$$

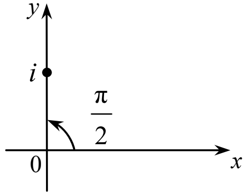


그림 4-9

문 제

1. 다음 복소수를 삼각형식으로 고쳐라.

1) $2i$ 2) $-1+i$ 3) 2

4) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 5) $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

2. 다음 복소수를 대수형식으로 고쳐라.

1) $2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ 2) $\frac{1}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$

3. $\alpha \cdot \overline{\alpha}=|\alpha|^2$이라는것을 밝혀라.

3. 삼각형식으로 표시된 복소수의 산법

해보기 다음과 같이 삼각형식으로 주어진 두 복소수를 곱해보아라. 또 나누어보아라.

$$\alpha=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1),\quad \beta=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$

삼각형식의 복소수를 곱할 때에는 절대값들은 곱해지고 편각들은 더해진다.

$$\alpha\beta=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$$

삼각형식의 복소수를 나눌 때에는 절대값들은 나누어지고 편각들은 덜어진다.

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$$

례 1. 1) $6(\cos45°+i\sin45°)\times\frac{1}{2}(\cos15°+i\sin15°)$

$$=\frac{6}{2}[\cos(45°+15°)+i\sin(45°+15°)]$$

$$=3(\cos60°+i\sin60°)$$

2) $\dfrac{0.8(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3})}{4(\cos\pi+i\sin\pi)}=\dfrac{0.8}{4}\left[\cos\left(\dfrac{4\pi}{3}-\pi\right)+i\sin\left(\dfrac{4\pi}{3}-\pi\right)\right]$

$$=0.2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

문 제

1. 다음것을 계산하여라.

1) $\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

2) $\dfrac{(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos2\theta+i\sin2\theta)}{\cos3\theta+i\sin3\theta}$

2. $(\sin9°-i\cos9°)(\cos13.5°+i\sin13.5°)=\mathrm{A}+\mathrm{B}i$ 일 때 A, B를 구하여라.

복소수의 절대값과 편각은 다음과 같은 성질을 가진다.

> 1) $|\alpha\beta|=|\alpha|\cdot|\beta|$, $\arg(\alpha\beta)=\arg\alpha+\arg\beta$
>
> 2) $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|=\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$, $\arg\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)=\arg\alpha-\arg\beta$

성질 1은 인수가 3개이상인 경우에도 그대로 성립한다. 즉

$$|\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n|=|\alpha_1|\cdot|\alpha_2|\cdot\cdots\cdot|\alpha_n|$$

$$\arg(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n)=\arg\alpha_1+\arg\alpha_2+\cdots+\arg\alpha_n$$

특히 $|\alpha^n|=|\alpha|^n$, $\arg(\alpha^n)=n\arg\alpha$

이로부터 다음의 복소수의 n제곱공식을 얻는다. ($n\in\mathrm{N}$)

$$\alpha^n=[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$

이 공식을 **마브르의 공식**이라고 부른다.

$z^n=\alpha$ 인 z를 복소수 α의 n**차뿌리**라고 부르고 $z=\sqrt[n]{\alpha}$ 와 같이 표시한다.

해보기 따브르의 공식을 써서 복소수의 n차뿌리를 구하는 공식을 만들어보아라.

$\alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ 일 때 편각에 2π 의 옹근수배를 더하여도 복소수는 달라지지 않으므로 다음 공식이 나온다.

$$\sqrt[n]{\alpha} = \left\{ z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right),\ k = 0,\ 1,\ \cdots,\ n-1 \right\}$$

여기서 $\sqrt[n]{r}$ 는 정수 r의 $\frac{1}{n}$ 제곱이다.

복소수 α 의 $\sqrt[n]{\alpha}$ 는 실수의 $\alpha^{\frac{1}{n}}$ 과는 달리 n개의 n차뿌리전부를 표시한다.

례 2. 복소수 $1+i$ 의 4차뿌리를 구하여라.

(풀이) $1+i$ 를 삼각형식으로 고치면

$$1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} \right)$$

따라서

$$\sqrt[4]{1+i} = \left\{ \sqrt[4]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4} \right),\ k = 0, 1, 2, 3 \right\}$$

$$= \left\{ \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16} + i\sin\frac{\pi}{16} \right)\left(\cos\frac{2k\pi}{4} + i\sin\frac{2k\pi}{4} \right),\ k = 0, 1, 2, 3 \right\}$$

이제 $\omega = \cos\frac{2\pi}{4} + i\sin\frac{2\pi}{4} (= i)$ 로 표시하면

$$\omega^k = \cos\frac{2k\pi}{4} + i\sin\frac{2k\pi}{4} (= i^k)$$

$1+i$ 의 4차뿌리를 z_k (k =0, 1, 2, 3)로 표시하면

$$z_k = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16} + i\sin\frac{\pi}{16} \right)\omega^k$$

이 네개의 값을 각각 표시하면

$$z_0=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16}+i\sin\frac{\pi}{16}\right)$$

$$z_1=z_0\omega^1=z_0 i$$

$$z_2=z_0\omega^2=z_0 i^2=-z_0$$

$$z_3=z_0\omega^3=z_0 i^3=-z_0 i$$

문 제

1. 다음것을 계산하여라.

1) $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^8$　　2) $(\cos 30°-i\sin 30°)^{-5}$

2. 다음것을 계산하여라.

1) $\sqrt[3]{-8}$　　2) $\sqrt[3]{i}$

3) $\sqrt[3]{i-1}$　　4) $\sqrt[5]{\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}}$

3. 복소수 α 의 n차뿌리 z_0, z_1, $\cdots$, z_{n-1} 은 복소수평면에서 원점을 중심으로 하고 반경이 $d=\sqrt[n]{r}$ 인 원둘레에 내접한 바른n각형의 정점에 놓인다. 왜 그런가?

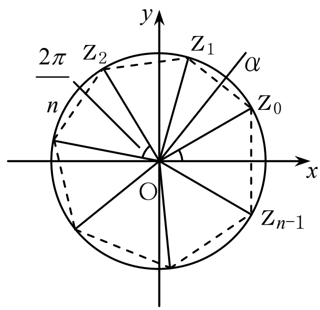


그림 4-10

4. 복소수산법의 기하학적의미

1) 더하기와 덜기

점 $\alpha=a+bi$, $\beta=c+di$ 의 복소수평면에서의 자리표는 각각 (a,b), (c,d)이다.

복소수 α 의 동경벡토르와 복소수 β 의 동경벡토르를 이웃한 두 변으로 하는 평행4변형에서 원점에서 나가는 대각선의 끝점의 자리표는 $(a+b$, $c+d)$ 이다. 이것은 그림에서 빗선을 친 3각형이 합동이라는데

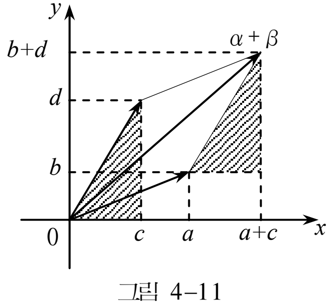


그림 4-11

로부터 곧 나온다.

$$(a+c)+(b+d)i=(a+bi)+(c+di)=\alpha+\beta$$

이므로 두 복소수 α와 β의 합 $\alpha+\beta$는 복소수 α의 동경벡토르와 복소수 β의 동경벡토르를 이웃한 두 변으로 하는 평행4변형의 대각선의 끝점으로 표시된다.

다음 안같기식이 성립한다는것도 곧 알수 있다.

$$|\alpha+\beta|\le|\alpha|+|\beta|$$

복소수 α에 복소수 β를 더한다는것은 α를 표시하는 점이 β의 동경벡토르의 방향으로 그 길이만큼 평행이동한다는것을 의미한다.

덜기는 더하기의 거꿀산법이므로 $\alpha-\beta=\gamma$ 라고 하면 $\beta+\gamma=\alpha$ 이므로 복소수 β의 동경벡토르를 한 변으로 하고 복소수 α의 동경벡토르를 대각선으로 하는 평행4변형의 이웃변의 끝점이 바로 차 $\alpha-\beta$를 표시한다.

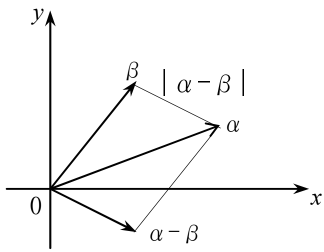


그림 4-12

2) 곱하기와 나누기

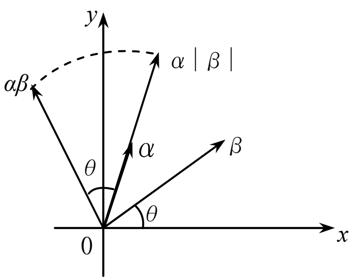


그림 4-13

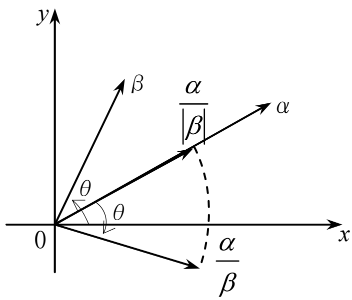


그림 4-14

두 복소수 α와 β의 적 $\alpha\beta$ ($\alpha\neq0$, $\beta\neq0$)는 복소수 α의 동경벡토르의 크기를 $|\beta|$배 하고 $\arg\beta$만큼 회전시킨 벡토르의 끝점으로 표시된다.

이것은 복소수의 절대값과 편각의 성질 1)로부터 곧 알수 있다.

복소수 α에 복소수 β를 곱한다는것은 α의 동경벡토르의 크기를 $|\beta|$배 하고 원점을 중심으로 $\arg\beta$만큼 정방향으로 회전한다는것을 의미한다. (그림 4-13)

두 복소수 α와 β의 상 $\dfrac{\alpha}{\beta}$ ($\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$)는 복소수 α의 동경벡토르의 크기를 $\dfrac{1}{|\beta|}$배 하고 $\arg\beta$만큼 부의 방향으로 회전시킨 벡토르의 끝점으로 표시된다. (그림 4-14)

이것은 복소수의 절대값과 편각의 성질 2)로부터 곧 알수 있다.

문 제

1. 복소수 α에 i를 곱한다는것은 α를 표시하는 점을 원점을 중심으로 90°만큼 정방향으로 회전한다는것을 의미한다. 왜 그런가?
2. 복소수 α에 다음 수를 곱하는것은 어떤 변환을 의미하는가?

1) $1+i$　　　　2) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

3. 복소수평면에서 점 z_1, z_2를 맺는 선분의 가운데점을 구하여라.

련습문제

1. 다음 복소수를 삼각형식으로 고쳐라.

1) $z=2-5i$　　　　2) $z=\dfrac{4}{1+\sqrt{8}\,i}$

3) $z=\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^2+\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\right)^2$

2. 다음것을 계산하여라.

1) $[0.03(\cos25°+i\sin25°)]^3\cdot[5(\cos20°+i\sin20°)]^2$

2) $\dfrac{\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)^2}{0.3\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)^2}$

3. $z=\cos\theta+i\sin\theta$ 일 때 $\cos\theta=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ 이라는것을 밝혀라.

4. $z+\frac{1}{z}=2$ 일 때 $\frac{1}{z^2}$ 을 삼각형식으로 표시하여라.

5. 다음것을 계산하여라.

1) $\sqrt{\cos 22°30'+i\sin 22°30'}$

2) $z^4=3(-1+\sqrt{3}i)$ 일 때 $z=?$

복습문제

1. 다음것을 계산하여라.

1) $i\cdot i^2\cdot i^3\cdot\cdots\cdot i^{100}$　　2) $\frac{1}{i^{11}}-\frac{1}{i^{41}}+\frac{1}{i^{25}}-\frac{1}{i^{1023}}$

2. 다음 방정식에서 실수 x, y 를 구하여라.

1) $18+25i=5(5x-2)+100(y-10)i$

2) $5x+46i+4iy+6y=(a+b)x-(a-b)i$

3) $(2x+yi)(x+2yi)=10+30i$

3. $z_1=1+i$, $z_2=1-\sqrt{3}i$, $z_3=-3(i-1)$ 일 때 $\frac{z_1 z_2}{z_3}$ 의 절대값과 편각을 구하여라.

4. 복소수평면에서 세 점 A$=2+2i$, B$=3-2i$, C$=-1-i$ 를 정점으로 하는 평행4변형 ABCD의 정점 D를 표시하는 복소수를 구하여라.

5. 복소수평면에서 복소수 z_1, z_2, z_3을 표시하는 점을 정점으로 하는 3각형의 무게중심을 구하여라.

6. 다음의 조건을 만족시키는 복소수 $z=x+yi$ 를 정하여라.

1) $z^2=i$　　2) $z^2-4iz+(-4+2i)=0$

7. 다음의 방정식을 풀어라.

1) $2x^2+6x+29=0$ 2) $(x+5)(x^2+64)=0$

3) $(x^2+2)(9x^2-6x+10)=0$

8. 복소수평면에서 점 $2-i$의 동경벡토르를 3배로 늘구고 정의방향으로 30° 회전시켜 얻은 점은 어떤 복소수를 표시하는가?

9. 복소수평면에서 $1+5i,\ 2+3i,\ -1+9i$를 표시하는 점을 각각 A, B, C라고 하자.

1) AB의 길이를 구하여라.

2) A, B, C가 한 직선에 놓인다는것을 밝혀라.

10. 복소수 $z_1,\ z_2$의 편각이 각각 $\theta_1,\ \theta_2$일 때

$$\left|z_1+z_2\right|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+|z_1||z_2|\cos(\theta_2-\theta_1)$$

임을 증명하여라.

11. $z=1-i$일 때 $\left|z-\dfrac{1}{z}\right|^2$의 값을 구하여라.

12. $\alpha+\beta\neq0$일 때

$$\left|\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha\overline{\beta}}\right|=1$$

이라는것을 증명하여라.

13. $|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=1$일 때 다음 같기식을 증명하여라.

$$\left|\alpha+\beta+r\right|=\left|\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{r}\right|$$

14. $z+\dfrac{1}{z}=2\cos\theta$일 때 $z^n+\dfrac{1}{z^n}$을 구하여라.

15. 복소수의 삼각형식을 써서 다음 식을 계산하여라.

$$\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^n+\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^n$$

16. 어떤 복소수에 $1+2i$를 더하면 그 복소수를 표시하던 점은 어떻게 움직이는가?

상식

19세기 수학의 《왕》 가우스

도이췰란드수학자 가우스(1777-1855)는 19세기 전반에 변량수학발전에서 비약을 가져오게 한 당시 수학계의 《왕》이였다.

가난한 벽돌공의 아들로 태여난 그는 어려서부터 수학에 뛰여난 재능을 가지고있었다. 그는 3살 때 아버지가 돈계산을 하는것을 옆에서 보고있다가 틀린것을 발견하여 어른들을 놀라게 하였으며 소학교 3학년 때 선생님이 1부터 100까지 수들을 전부 합하면 얼마인가고 묻자 즉석에서 5 050이라고 대답하여 선생님을 깜짝 놀라게 하였다.

그는 다음과 같이 계산하였다.

$$\begin{array}{rl} S &= 1 + 2 + \cdots + 99 + 100 \\ +\ S &= 100 + 99 + \cdots + 2 + 1 \\ \hline 2S &= \underbrace{101 + 101 + \cdots + 101 + 101}_{100\text{개}} \end{array}$$

그는 19살의 대학시절에 2 000년동안 론의되여오던 눈금없는 자와 콤파스에 의한 바른17각형의 그리기문제를 해명하였으며 22살 때 당대의 유명한 수학자들도 완전히 해명하지 못한 대수학의 기본정리 《모든 n차대수방정식은 적어도 하나의 복소수풀이를 가진다.》를 증명하였다.

가우스의 수학연구활동에서는 일련의 특성이 있는데 그것은 순수수학과 응용수학사이에 유기적인 련관을 지어주었다는것과 그가 쓴 책의 내용이 풍부하다는것이다.

제5장. 모임과 명제

제1절. 모임과 그 산법

a가 모임 A의 원소라는것을 $a \in \mathrm{A}$로, a가 모임 A의 원소가 아니라는것을 $a \notin \mathrm{A}$로 표시하였다.

모임 A가 모임 B의 부분모임이라는것을 $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$로 표시한다. 빈모임을 ϕ로 표시하고 $\phi \subset \mathrm{A}$로 본다. 또한 $\mathrm{A} \subset \mathrm{A}$로도 본다.

ϕ, A가 아닌 A의 부분모임을 **참부분모임**이라고 부른다.

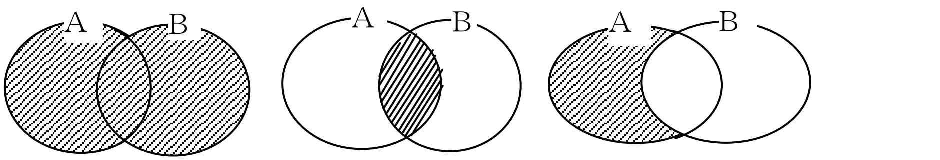
례 1. 자연수모임 N, 옹근수모임 Z, 유리수모임 Q, 실수모임 R, 복소수모임 C에서 $2 \in \mathrm{N}$, $-2 \in \mathrm{Z}$, $\frac{3}{2} \in \mathrm{Q}$, $\sqrt{2} \in \mathrm{R}$, $2+3i \notin \mathrm{R}$이다.

$\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$, $\mathrm{A} \supset \mathrm{B}$일 때 A와 B는 **같은 모임**이라고 부르고 $\mathrm{A} = \mathrm{B}$로 표시한다.

례 2. $(x-a)(x-b)=0$의 풀이모임을 A, $x^2-(a+b)x+ab=0$의 풀이모임을 B라고 하면

$$\mathrm{A}=\mathrm{B}$$

두 모임 A, B의 합 $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$, 적 $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$, 차 $\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}$는 다음과 같다.



$\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \{x \mid x \in \mathrm{A}$ 또는 $x \in \mathrm{B}\}$ $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{x \mid x \in \mathrm{A}$ 이고 $x \in \mathrm{B}\}$ $\mathrm{A} \setminus \mathrm{B} = \{x \mid x \in \mathrm{A}$ 이고 $x \notin \mathrm{B}\}$

그림 5-1

모임 U를 하나 정해놓고 그 부분모임을 생각할 때 처음에 정한 모임 U를 **전체모임**이라고 부른다.

앞으로 모임 A, B, C,⋯라고 하면 이것들은 전체 모임 U의 부분모임으로 보겠다.

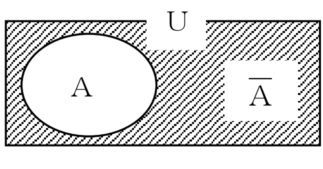


그림 5-2

U\A를 A의 **나머지모임**이라고 부르고 $\overline{A}$로 표시한다.

례 3. 3개 원소로 된 모임 U={*a*, *b*, *c*}의 부분모임은

ϕ, {*a*}, {*b*}, {*c*}, {*a*, *b*}, {*a*, *c*}, {*b*, *c*}, {*a*, *b*, *c*} 이다.

모임 또는 그것들을 모임산법기호로 이어놓은것을 **모임식**, 모임식들을 같기기호로 이어놓은것을 **모임같기식**이라고 부른다.

실례로 A, A∩(A∪B) 등은 모임식이고 A=A∩(A∪B)는 모임같기식이다.

모임 A, B, C에 대하여

1) A∪B=B∪A , A∩B=B∩A (바꿈법칙)

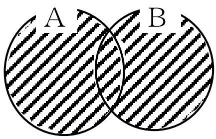
2) (A∪B)∪C=A∪(B∪C)

(A∩B)∩C=A∩(B∩C) (묶음법칙)

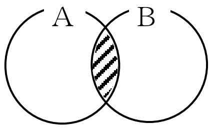
3) A∪(B∩C)=(A∪B)∩(A∪C)

A∩(B∪C)=(A∩B)∪(A∩C) (분배법칙)

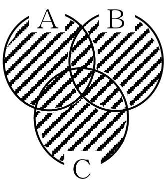
이것은 다음과 같은 모임그림으로 알수 있다.



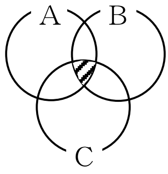
A∪B=B∪A



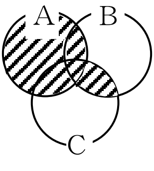
A∩B=B∩A



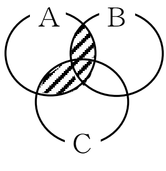
(A∪B)∪C=A∪(B∪C)



(A∩B)∩C=A∩(B∩C)



A∪(B∩C)=(A∪B)∩(A∪C)



A∩(B∪C)=(A∩B)∪(A∩C)

그림 5-3

알아보기 모임그림을 그려 $\overline{A\cap B}$ 와 $\overline{A}\cup\overline{B}$ 가 같은가를 알아보아라.

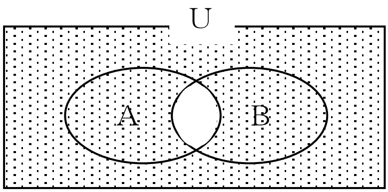


그림 5-4

> 모임 A, B 에 대하여
>
> 1) $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$
>
> 2) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ (쌍대법칙)

례 4. 모임같기식 $A\cap(A\cup B)=A$ 를 증명하여라.

(증명) 분배법칙에 의하여

$A\cap(A\cup B)=(A\cap A)\cup(A\cap B)$

그런데 $A\cap B\subset A$ 이므로

즉 $A\cap(A\cup B)=A$

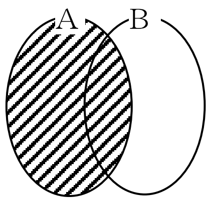


그림 5-5

문 제

1. 모임같기식 $(A\cup\overline{B})\cap\overline{A}\cup\overline{B}\neq\phi$ 을 증명하여라.
2. 모임같기식 $\overline{A\cap B\cap C}=\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$ 을 증명하여라.

련습문제

1. 다음 모임같기식이 성립하는가?
   1) $A\cup(B\setminus C)=(A\cup B)\setminus(A\cup C)$
   2) $(A\cup B)\cap(A\cup B)=A\cup B$
2. 다음것을 증명하여라.
   1) $A\subset B\Rightarrow\overline{B}\subset\overline{A}$ 2) $A\subset B\Rightarrow A\cap C\subset B\cap C$

제2절. 명제와 그 산법

1. 명제

옳다든가 옳지 않다든가를 찍어서 말할수 있는 글 또는 식을 **명제**라고 부른다.

그러므로 명제에는 옳은 명제도 있고 옳지 않은 명제도 있다.

례 1. 1) 2＋3＝5　　　옳은 명제

2) 90°＜45°　　　옳지 않은 명제

> 명제 a에 대하여 a가 옳으면 1을 대응시키고 a가 옳지 않으면 0을 대응시킨다. 이때 명제에 대응하는 1, 0을 그 **명제값**이라고 부르고 $[a]$로 표시한다.

례 2. 1) a : 2등변3각형의 두 밑각은 같다. $[a]=1$

2) b : 직3각형에서 빗변이 제일 작다. $[b]=0$

3) c : 3각형의 아낙각의 합은 2π이다. $[c]=0$

문 제

다음것에서 명제를 찾고 옳은 명제와 옳지 않은 명제들을 갈라내여라.

1) 직3각형에는 무딘각이 없다.

2) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

3) 2차방정식은 2개의 풀이를 가진다.

2. 명제산법

명제들에 《…아니다.》, 《…이고 …이다.》, 《… 또는 …》, 《…이면 …이다.》등의 말을 이어서 새로운 명제를 만드는것을 명제의 **합성**이라고 부른다.

이때 새로 만들어진 명제를 합성명제라고 부른다.

부정명제

> 명제 a에 대하여 《 a가 아니다. 》라는 새로운 명제를 만들었을 때 이것을 명제 a의 **부정명제**라고 부르고 $\overline{a}$로 표시한다.

례 3. a: 3각형의 아낙각의 합은 2∠R가 아니다.(옳지 않은 명제)

$\overline{a}$: 3각형의 아낙각의 합은 2∠R이다.(옳은 명제)

부정명제 $\overline{a}$의 명제값은 다음과 같다.

a	$\overline{a}$
1	0
0	1

이와 같이 명제값을 표로 표시한것을 **명제값표**라고 부른다.

합명제

> 두 명제 a, b에 대하여 a, b가운데 하나라도 옳으면 옳다고 보는 새로운 명제 《 a 또는 b이다. 》를 명제 a와 b의 **합명제**라고 부르고 $a \vee b$로 표시한다.

$a \vee b$는 a, b가 함께 옳지 않으면 옳지 않다.

그리하여 $a \vee b$의 명제값표를 쓰면 다음과 같다.

a	b	$a \vee b$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

례 4. a:《평행직선에서 엇각은 같다.》(옳은 명제)

b:《평행직선에서 같은자리각은 다르다.》(옳지 않은 명제)

$a \vee b$:《 평행직선에서 엇각은 같으나 같은자리각은 다르다.》(옳은 명제)

적명제

> 두 명제 a, b 가운데 하나라도 옳지 않은것이 있다면 옳지 않다고 보는 새로운 명제 《 a 이고 b 이다. 》를 명제 a 와 b 의 **적명제**라고 부르고 $a \wedge b$ 로 표시한다. (때로는 $a \cdot b$ 로 표시한다.)

$a \wedge b$ 는 a, b 가운데 하나라도 옳지 않은것이 있다면 옳지 않다. 그리하여 $a \wedge b$ 의 명제값표를 쓰면 다음과 같다.

a	b	$a \wedge b$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

례 5. 그림 5-6에서 직선 p, q 는 어기는 직선이다.

a :《 직선 p, q 는 평행이 아니다. 》

(옳은 명제)

b :《 직선 p, q 는 사귀지 않는다. 》

(옳은 명제)

$a \wedge b$:《 직선 p, q 는 평행도 아니고 사귀지도 않는다. 》

(옳은 명제)

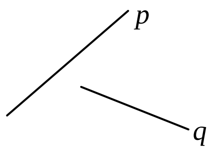


그림 5-6

따름명제

> 두 명제 a, b 에 대하여 a 가 옳고 b 가 옳지 않을 때만 옳지 않고 다른 때는 옳다고 보는 새로운 명제 《 a 이면 b 이다. 》를 명제 a, b 의 **따름명제**라고 부르고 $a \rightarrow b$ 로 표시한다.

그리하여 $a \rightarrow b$ 의 명제값표를 쓰면 다음과 같다.

a	b	$a \to b$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

례 6. a: 《3각형에서 두 변은 같다.》
b: 《3각형에서 두 각은 같다.》
$a \to b$:《3각형에서 두 변이 같으면 두 각은 같다.》

따름명제 $a \to b$에서 명제 a가 성립하는 대상들의 모임을 A, 명제 b가 성립하는 대상들의 모임을 B로 표시할 때 A와 B가 어떤 전체모임 U의 부분모임인 경우를 보자. 이때 $a \to b$를 $a \Rightarrow b$로 표시할 때도 있다.

례 7. a:《옹근수는 6의 배수이다.》
b:《옹근수는 합성수이다.》
이때 따름명제
$a \Rightarrow b$:《 옹근수가 6의 배수이면 그 수는 합성수이다.》는 옳다.
이때 A⊂B이다.

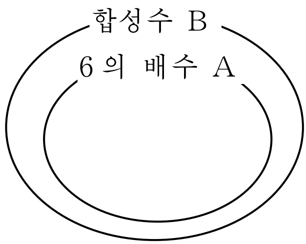


그림 5-7

명제 $a \to b$가 옳으면 A⊂B이고 그 거꿀도 성립한다.

동등명제

> 두 명제 a, b에 대하여 《 a이면 b이고 b이면 a이다.》라는 명제를 **동등명제**라고 부르고 $a \leftrightarrow b$로 표시한다.

동등명제 $a \leftrightarrow b$의 명제값표를 만들면 다음과 같다.

a b	$a \to b$	$b \to a$	$a \leftrightarrow b$ $(a \to b) \wedge (b \to a)$
1 1	1	1	1
1 0	0	1	0
0 1	1	0	0
0 0	1	1	1

례 8. 2등변3각형 ABC 에서(그림 5-8)

a : 《△ABC에서 AB=AC이다.》

b: 《△ABC에서 ∠B = ∠C 이다.》

$a \to b$: 《△ABC에서 AB=AC→ ∠B = ∠C 》(옳은 명제)

$b \to a$: 《△ABC에서 ∠B = ∠C → AB = AC 》(옳은 명제)

$a \leftrightarrow b$: 《△ABC에서 AB = AC ↔ ∠B = ∠C 》

(즉 △ABC 에서 AB=AC 와 ∠B = ∠C 는 동등하다.)

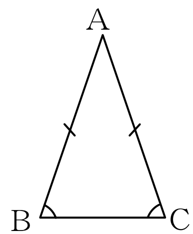


그림 5-8

명제의 합성을 명제산법이라고 부르고 우에서 본 명제의 산법기호 ¬, ∨, ∧, →, ↔를 론리기호라고 부른다.

문 제

다음 명제들의 명제값을 말하여라.

1) a : $1 < 2$, b : $3 < 4$ 라고 할 때 $a \wedge b$, $\overline{a} \wedge b$, $a \wedge \overline{b}$, $\overline{a} \wedge \overline{b}$

2) 3각형의 아나각의 합은 2∠R 또는 3∠R 이다.

련습문제

1. 명제 $a : 2 < 3$
   b : 3 각형의 세 아낙각의 합은 π 이다.

   에 대하여 $\overline{a}$, $\overline{b}$ 를 만들고 a, $\overline{a}$, b, $\overline{b}$ 의 명제값을 말하여라.

2. 다음 명제들의 명제값을 말하여라.

   1) $a : 3 < 2$, $b : (-3)\cdot(-2) = 6$ 일 때 $a \vee b$, $a \vee \overline{b}$, $\overline{a} \vee b$, $\overline{a} \vee \overline{b}$

   2) $a : 3 + 5 = 7$, $b : 2 + 6 = 8$ 일 때 $a \vee b$, $\overline{a} \vee b$, $a \vee \overline{b}$, $\overline{a} \vee \overline{b}$

   3) 3 각형의 아낙각의 합은 3∠R 이고 4 각형의 아낙각의 합은 2∠R 이다.

제3절. 명제의 산법법칙

두 합성명제가 꼭같은 명제값표를 가질 때 두 합성명제는 **같다**고 말하고 기호 《＝》를 써서 표시한다.

명제 a, b, c 에 대하여

1) $a \vee b = b \vee a$
   $a \wedge b = b \wedge a$
   $(a \leftrightarrow b) = (b \leftrightarrow a)$ (바꿈법칙)

2) $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$
   $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ (묶음법칙)

3) $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
   $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ (분배법칙)

(증명) 바꿈법칙과 묶음법칙이 성립하는것은 분명하다. 분배법칙의 첫째 식을 증명하자. 그러기 위하여 아래의 표와 같은 명제값표를 만들자.

$a\ b\ c$	$b\wedge c$	$a\vee b$	$a\vee c$	$a\vee(b\wedge c)$	$(a\vee b)\wedge(a\vee c)$
1 1 1	1	1	1	1	1
1 1 0	0	1	1	1	1
1 0 1	0	1	1	1	1
1 0 0	0	1	1	1	1
0 1 1	1	1	1	1	1
0 1 0	0	1	0	0	0
0 0 1	0	0	1	0	0
0 0 0	0	0	0	0	0

표에서 보는것처럼 $a\vee(b\wedge c)$와 $(a\vee b)\wedge(a\vee c)$는 같은 명제값표를 가진다.

그러므로 $a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$

분배법칙 3)의 둘째 식도 우에서와 같은 방법으로 증명할수 있다.

알아보기 $\overline{a\wedge b}$와 $\overline{a}\vee\overline{b}$의 명제값표를 만들고 같은가를 알아보아라.

$a\quad b$	$\overline{a}\quad\overline{b}$	$a\wedge b$	$\overline{a\wedge b}$	$\overline{a}\vee\overline{b}$
1 1	0 0	1		
1 0	0 1	0		
0 1	1 0	0		
0 0	1 1	0		

> 명제 $a,\ b$에 대하여
>
> 1) $\overline{a\wedge b}=\overline{a}\vee\overline{b}$
>
> 2) $\overline{a\vee b}=\overline{a}\wedge\overline{b}$ (쌍대법칙)

앞으로 론리산법에서 묶음표가 있지 않을 때에는 계산을

$\neg,\quad \vee,\quad \wedge,\quad \rightarrow,\quad \leftrightarrow$

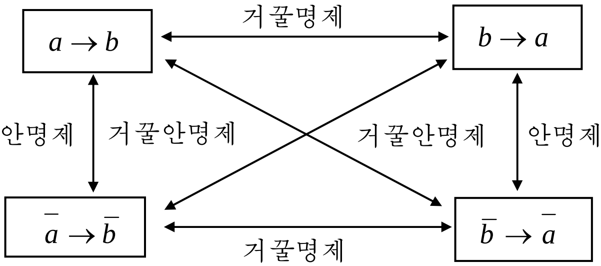
순서로 하기로 하겠다.

명제 $a\rightarrow b$에 대하여 명제 $b\rightarrow a$를 거꿀명제,

명제 $a\rightarrow b$에 대하여 명제 $\overline{a}\rightarrow\overline{b}$를 안명제 (또는 부명제),

명제 $a\rightarrow b$에 대하여 명제 $\overline{b}\rightarrow\overline{a}$를 거꿀안명제라고 부른다.

이것을 하나의 표로 묶으면 다음과 같다.



명제 $a \to b$와 그의 거꿀안명제 $\bar{b} \to \bar{a}$는 같은 명제이다.

(증명) 명제값표를 만들면

a	b	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$a \to b$	$\bar{b} \to \bar{a}$
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

그러므로 $(a \to b) = (\bar{b} \to \bar{a})$

우의 정리에 의하여 $a \to b$를 증명할 대신에 $\bar{b} \to \bar{a}$를 증명하여도 된다.

이것도 귀유법에 속한다는것을 알수 있다.

례. $(a \to b) \neq (b \to a)$, $(a \to b) \neq (\bar{a} \to \bar{b})$를 증명하여라.

(증명) 명제값표를 만들면

a	b	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$a \to b$	$b \to a$	$\bar{a} \to \bar{b}$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1

따라서

$$(a \to b) \neq (b \to a)$$

$$(a \to b) \neq (\overline{a} \to \overline{b})$$

이리하여 어떤 명제가 옳다고 하여 그것의 거꿀명제, 안명제가 반드시 옳다는것은 아니라는것을 알수 있다.

문제

1. 다음 식을 증명하여라.

1) $a \vee (a \wedge b) = a$ 2) $a \wedge (a \vee b) = a \wedge \overline{b}$

2. 다음 식이 성립하겠는가?

1) $\overline{a \wedge (\overline{b} \vee \overline{a})} \wedge c = \overline{a} \vee (b \wedge a) \vee \overline{c}$

2) $a \to (b \to c) = a \wedge b \to c$

련습문제

1. a∶$3<5$, b∶$2>3$이라고 할 때 다음 명제들의 명제값을 구하여라.

1) $\overline{a}$, $\overline{b}$, $a \vee b$, $\overline{a} \vee b$ 2) $a \wedge b$, $\overline{a} \wedge b$, $a \wedge \overline{b}$

2. 다음 같기식이 성립하겠는가?

1) $\overline{a} \vee (a \wedge b) = \overline{a} \vee b$ 2) $a \wedge (\overline{a} \vee b) = (a \vee b) \wedge (a \vee \overline{b}) \wedge b$

3. 다음 식이 성립하겠는가?

1) $a \wedge b = \overline{a} \vee \overline{b}$ 2) $a \vee b = \overline{a} \wedge \overline{b}$ 3) $(\overline{a} \vee \overline{b}) \wedge c = \overline{a \wedge b \vee c}$

복습문제

1. 다음 모임같기식을 증명하여라.

1) $(\overline{\mathrm{A}} \cup \mathrm{B}) \cap (\overline{\mathrm{A}} \cup \overline{\mathrm{B}}) = \overline{\mathrm{A}}$ 2) $\mathrm{A} \cap (\mathrm{A} \cup \overline{\mathrm{B}}) = \mathrm{A}$

2. a∶$3-2=0$, b∶$3+2=5$일 때 다음 명제의 명제값을 말하여라.

$a \wedge \overline{b}$, $\overline{b} \vee a$, $(a \vee b) \wedge \overline{b}$, $(a \wedge \overline{b}) \vee (\overline{a} \wedge b)$

3. 모임 $\cup = \{x | x$는 20보다 크지 않은 씨수$\}$가 주어졌다.

A, B가 부분모임이고 $A\cap\overline{B}=\{3,\ 5\}$ $\overline{A}\cap B=\{7,\ 19\}$, $\overline{A}\cap\overline{B}=\{2,\ 17\}$이다. A, B를 구하여라.

4. 다음 명제갈기식을 증명하여라.

1) $\bar{b}=\bar{b}\wedge(a\vee\bar{b})$ 2) $\overline{\bar{a}\vee\bar{b}}=b\wedge(a\vee\bar{b})$

3) $a\wedge(a\vee\bar{b})=\overline{(\bar{a}\wedge b)\vee(\bar{a}\wedge\bar{b})}$

5. p, q가 두개의 명제이고 《p 또는 q》의 부정이 옳다면 아래에서 반드시 있게 되는것은 ( )이다.

ㄱ) p 옳다, q 옳다 ㄴ) p 옳지 않다, q 옳지 않다

ㄷ) p 옳다, q 옳지 않다 ㄹ) p 옳지 않다, q 옳다

6. 명제 《∠B가 무딘각이면 △ABC는 무딘3각형이다.》와 그의 거꿀명제, 안명제, 거꿀안명제에서 옳은 명제로 되는것을 찾아라.

7. 다음 갈기식을 증명하여라.

1) $(a\vee b)\wedge(\bar{a}\vee b)=b$

2) $(a\vee b)\wedge(\bar{a}\vee c)=(a\wedge c)\vee(\bar{a}\wedge b)\vee(b\wedge c)$

상식

모임론의 창시자 — 칸토르

칸토르(1845-1918)는 도이췰란드수학자로서 수학리론의 중요한 기초로 되는 모임론을 창시하였다. 그는 유한모임에서 원소의 개수개념을 무한모임에로 일반화하여 무한모임에서 원소의 개수개념을 처음으로 정의하고 무한모임을 다루는 새로운 방법을 내놓았다. 칸토르가 모임론을 내놓은 당시 사람들은 그의 심오한 리론을 리해하지 못하였으며 오히려 가혹하게 비평까지 하였다.

그는 정신적장애를 받아 병원에 입원하게 되였으나 병원에서도 모임론에 대한 연구를 계속 진행하였으며 모임론을 창시하였다. 칸토르가 내놓은 모임론은 그가 죽은지 30년이 지나서야 수학의 엄격한 건설을 시도하는 과정에 수학계의 인정을 받게 되였으며 오늘에 와서는 모든 수학리론의 기초로 되고있다.

제6장. 공간도형

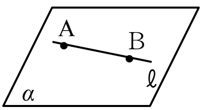
제1절. 공간에서 직선과 평면

1. 기초명제

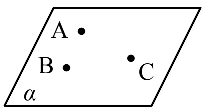
다음의 성질은 공간도형을 배워나가는데서 기초로 된다.

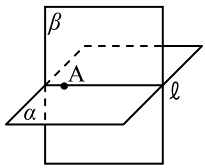
공간도형의 기초명제

1. 직선의 두 점이 평면에 놓이면 직선은 그 평면에 완전히 놓인다.
2. 한 직선에 놓이지 않는 세 점을 지나는 평면은 있으며 다만 하나 있다.
3. 두 평면이 하나의 공통점을 가지면 그 평면들은 그 공통점을 지나는 한 직선에서 사귄다.



$\ell \in \alpha$





$\alpha \cap \beta = \ell$

알아보기 1) 한 직선 AB를 지나는 평면은 무수히 많은가?
2) 한 직선 AB와 점 M을 지나는 평면은 많은가?

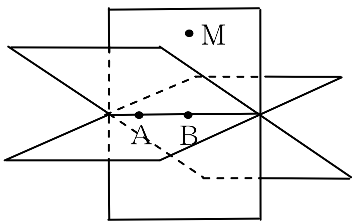


그림 6-1

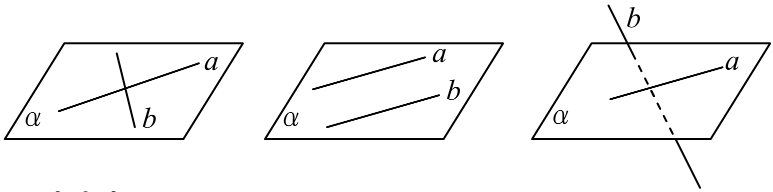
평면은 다음과 같은 경우에 하나로 결정된다.

평면의 결정조건

1. 한 직선에 놓이지 않는 세 점
2. 직선과 그밖의 한 점
3. 평행인 두 직선
4. 사귀는 두 직선

알아보기 다음과 같은 자리관계밖에 다른 자리관계가 있는가를 알아보아라.

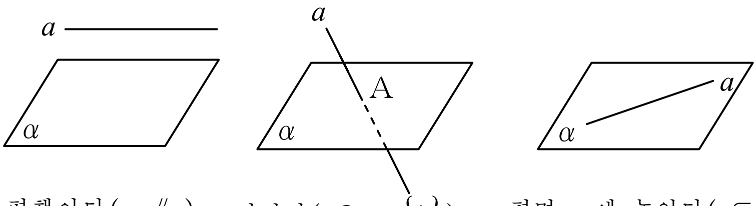
1. 공간에서 두 직선의 자리관계



사귄다　　　　평행이다　　　　어긴다 $a\cap b=\phi$

그림 6-2

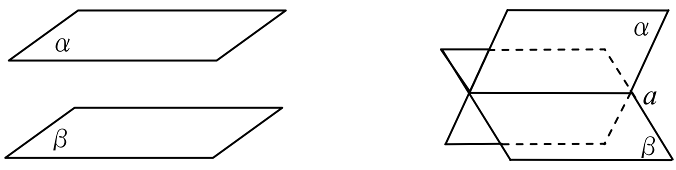
2. 직선과 평면의 자리관계



평행이다($\alpha \parallel a$)　사귄다($a\cap\alpha=\{A\}$)　평면 α에 놓인다($a\subset\alpha$)

그림 6-3

3. 두 평면의 자리관계



평행이다 ($\alpha \parallel \beta$)　　　사귄다 ($\alpha\cap\beta=a$)

그림 6-4

문 제

1. 다음의 경우 평면이 결정되는가?

1) 세 점이 주어진 경우

2) 한 직선과 한 점이 주어진 경우

3) 두 직선이 주어진 경우

4) 사귀는 두 직선이 주어진 경우

2. 한 평면에 놓이지 않는 네 점은 몇개의 평면을 결정하는가?

3. 두 평행직선과 사귀는 직선은 두 평행직선이 결정하는 평면에 놓인다. 왜 그런가? 사귀는 두 직선과 각각 다른 점에서 사귀는 셋째 직선은 사귀는 두 직선이 결정하는 평면에 놓인다. 왜 그런가?

2. 직선 및 평면의 평행

알아보기 그림 6-5에서 밑면 BCC_1B_1을 α, 옆면 D_1DCC_1을 β라고 하고 모서리 D_1D, CC_1이 주어졌을 때

1) $D_1D /\!/ \alpha$, $\alpha \cap \beta = CC_1$ 이면 $CC_1 /\!/ DD_1$이겠는가?

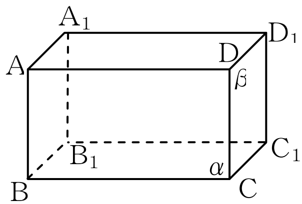


그림 6-5

2) $CC_1 /\!/ DD_1$, $CC_1 \subset \alpha$ 이면 $DD_1 /\!/ \alpha$ 이겠는가?

> **정리 1.** 직선 a가 평면 α와 평행이고 a를 지나는 평면 β와 α와의 사귐선이 b이면 a는 b와 평행이다.

(증명) $a /\!/ \alpha$ 이므로 a는 α의 어느 직선과도 사귀지 않는다. 한편 a, b는 한 평면 β에 놓이면서 사귀지 않으므로

$$a /\!/ b$$

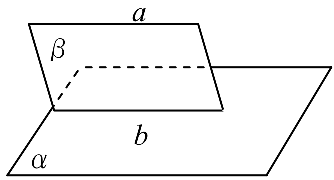


그림 6-6

또한 다음 사실도 성립한다.

계 1. 서로 평행인 두 직선을 각각 지나는 두 평면의 사귐선은 처음 직선에 평행이다.

계 2. 한 직선 c에 각각 평행인 두 직선 a, b는 서로 평행이다.

례 1. 두 평행평면 α, β가 다른 한 평면 γ와 사귀는 선 a, b는 서로 평행이다. 왜 그런가?(그림 6-7)

(풀이) $\alpha // \beta$이므로 a, b는 서로 사귀지 않는다.
한편 a, b는 한 평면 γ에 놓인다.
그러므로

$$a // b$$

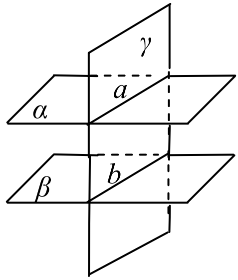


그림 6-7

례 2. 평면 β에 놓여있는 사귀는 두 직선 a, b가 각각 평면 α와 평행이면 β는 α와 평행이다. 왜 그런가?

(풀이) α와 β가 평행이 아니라고 하면 어떤 직선 c에서 사귄다.
그러면 정리 1에 의하여

$$a // c, \quad b // c$$

이것은 a와 b가 사귄다는데 모순된다.(그림 6-8)
따라서

$$\alpha // \beta$$

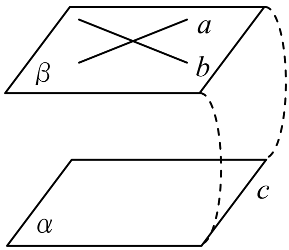


그림 6-8

문 제

1. 다음 명제에서 옳은것은 어느것인가?
   1) 평행이 아닌 두 평면 α, β가 다른 한 평면 γ와 사귈 때 그 사귐선 a, b는 평행이 아니다.
   2) 평행이 아닌 두 평면밖의 한 점을 지나며 그 두 평면에 평행인 직선 a는 있다.

3) 어기는 두 직선 a, b밖의 한 점 M을 지나는 평면 α는 직선 a, b와 사귄다.

2. 두 평행평면 α, β 사이에 끼워있는 평행선분들의 길이는 같다. 왜 그런가?

3. 점 O에서 사귀는 두 직선 a, b와 점 O_1에서 사귀는 두 직선 a_1, b_1에서 $a // a_1$, $b // b_1$이면 $\angle(a, b) = \angle(a_1, b_1)$이거나 $\angle(a, b) + \angle(a_1, b_1) = 180^\circ$이다. 왜 그런가? (여기서 $\angle(a, b)$는 두 직선 a, b사이의 각을 표시한다.)

3. 직선 및 평면의 수직

알아보기 두 직선 a, b가 어기고있다. a의 점 O, O_1에서 $b // m_1$, $b // m_2$되게 직선 m_1, m_2를 긋자. 각 θ와 θ'가 같겠는가? 또 a의 다른 점에서 평행직선을 긋고 생각해보아라.

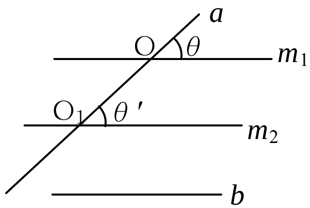
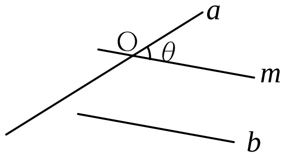


그림 6-9

두 직선 a와 b가 어길 때 직선 a의 한 점 O를 지나 b에 평행인 직선 m을 그었을 때 생기는 각 θ를 어기는 두 직선 a, b사이의 **각**이라고 부르고 $\angle(a, b)$로 표시한다.

그리고 $\angle(a, b) = \angle R$일 때 a와 b는 **수직**이라고 부른다.



례 1. 6면체에서 모서리 AD와 A_1B_1은 어기는 직선이고

$\angle(AD, A_1B_1) = \angle R$

이므로 서로 수직이다. (그림 6-10)

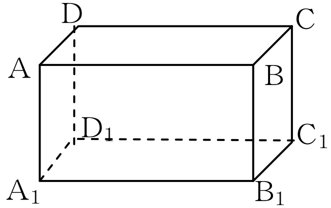


그림 6-10

직선 ℓ이 평면 α에 놓이는 모든 직선과 수직일 때 ℓ은 α와 **수직**이라고 부른다. 직선 ℓ이 평면 α와 수직일 때 ℓ은 α의 **수직선**, 그렇지 않을 때 ℓ은 α의 **빗선**이라고 부른다.

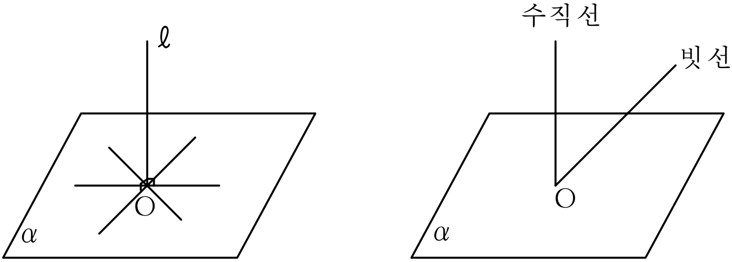


그림 6-11

평면 α에 평행광선을 수직으로 비쳤을 때 평면 α에 나타난 도형 F의 그림자를 도형 F의 평면 α에 던진 **바른사영**이라고 부르고

《**사영**$_{\alpha}$F》 또는 $P_{r_\alpha}F$

와 같이 표시한다.

이때 평면 α를 **사영면**이라고 부른다.

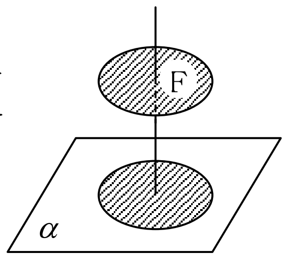


그림 6-12

알아보기 기둥 BB_1의 버팀줄 AB에 태양광선이 정오에 수직으로 비칠 때 그림자 AB_1이 얻어졌다. 오후 3시에 그림자가 AB_2로 나타났다.

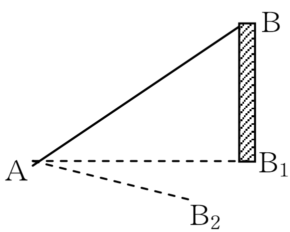
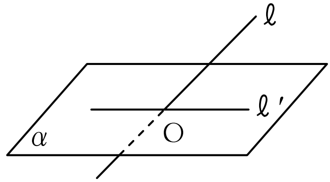


그림 6-13

1) $\angle BAB_1$과 $\angle BAB_2$가운데서 어느것이 큰가?

2) AB의 모든 그림자가운데서 AB와 이루는 각이 제일 작은것은 어느것이겠는가?

빛선 ℓ이 평면 α에 던진 바른사영을 ℓ'라고 할 때 ℓ과 ℓ'가 이루는 각을 직선 ℓ과 평면 α가 이루는 **각**이라고 부른다.

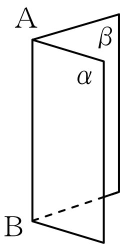


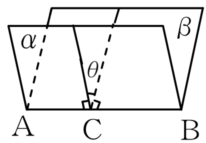
평면에 놓인 한 직선은 그 평면을 두 부분으로 나눈다. 이때 매 부분을 **반평면**이라고 부른다.

평면은 공간을 두 부분으로 나눈다. 마찬가지로 한 직선에서 나가는 두 반평면도 공간을 두 부분으로 나눈다.

한 직선으로부터 나가는 두개의 반평면과 그사이에 낀 공간부분을 **2면각**이라고 부른다.

여기서 공통직선을 2면각의 **모서리**, 반평면을 2면각의 **면**이라고 부르고 모서리가 AB이고 면이 α, β인 2면각을《2면각 AB》 또는《2면각 $\alpha AB\beta$》와 같이 표시한다.





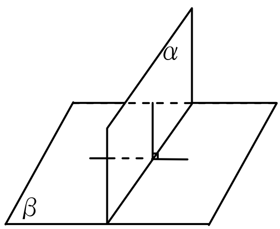
2면각의 모서리에서 임의로 한 점 C를 잡고 C를 지나서 모서리에 수직인 반직선을 매 면에 그었을 때 이 두 반직선이 만드는 각은 일정하다.

이 각을 주어진 **2면각의 평면각**이라고 부른다.

2면각의 크기는 그 2면각의 평면각의 크기로 표시한다.

두 평면이 이루는 2면각의 평면각을 두 평면사이의 **각**이라고 부른다.

두 평면사이의 각이 직각일 때 두 평면은 서로 **수직**이라고 부른다.



직선 ℓ이 평면 α에 놓여있는 사귀는 두 직선 a, b와 각각 수직이면 ℓ은 α와 수직이라는것을 알고있다. 그리고 직선 ℓ이 평면 α와 수직이면 ℓ을 지나는 평면 β가 α와 수직이라는것도 알고있다.

이 명제의 거꿀명제도 성립한다. 즉 두 평면 α, β가 수직이면 β의 점 A에서 α에 그은 수직선은 β에 포함된다.

만일 수직선이 β에 포함되지 않는다고 가정하면 β에서 점 A를 지나 사귐선 ℓ에 수직선을 그었을 때 그것은 평면 α와 수직이여서 결국 A를 지나며 α에 수직인 직선이 둘이라는 모순이 생긴다.

알아보기 기둥 AC에 버팀줄 AB가 그림과 같이 있다. 땅바닥에 태양광선이 수직으로 비칠 때 버팀줄의 그림자 BC가 얻어졌다. 점 B에서 버팀줄에 수직인 직선 a는 그 사영 BC에도 수직이겠는가를 생각해보아라. 거꾸로 그림자에 수직인 직선 a는 버팀줄에도 수직이겠는가를 생각해보아라.

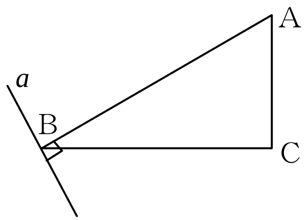


그림 6-14

정리 2. 사영면 α에 놓인 직선 a가 빗선 b와 수직이면 직선 a는 빗선의 바른사영 b_1과도 수직이다.

(증명) b의 한 점 A에서 α에 그은 수직선의 밑점을 A_1이라고 하면 A_1은 b_1에 놓인다.(그림 6-15)

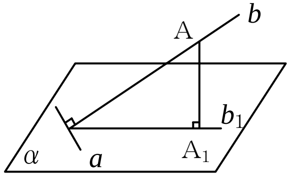


그림 6-15

$b \perp a$ (조건)이고

$AA_1 \perp \alpha$ 이므로 $AA_1 \perp a$

따라서 a는 b와 AA_1이 결정하는 평면과 수직이다. 그러므로 a는 b와 AA_1이 결정하는 평면에 놓여있는 직선 b_1과 수직이다. 즉

$$a \perp b_1$$

거꾸로 다음 사실도 성립한다.

> **정리 3.** 사영면 α에 놓인 직선 a가 빗선 b의 바른사영 b_1과 수직이면 직선 a는 빗선 b와도 수직이다.

이것은 정리 2를 증명할 때와 꼭같은 방법으로 증명할수 있다. 이 정리들을 **세 수직선의 정리**라고 부른다.

례 2. 직선 ℓ이 서로 평행인 두 평면 α, β 가운데서 하나에 수직이면 다른것에도 수직이다. 왜 그런가?

(풀이) 직선 ℓ을 지나는 평면 γ가 α, β와 사귀는 선을 a, a_1이라고 하고 ℓ을 지나는 다른 한 평면 δ가 α, β와의 사귐선을 b, b_1이라고 하자.(그림 6-16)

$\ell \perp \alpha$이면

$\ell \perp a,\ \ell \perp b,\ \alpha // \beta$이므로

$a // a_1,\ b // b_1$

따라서 $\ell \perp a_1,\ \ell \perp b_1$

이리하여 $\ell \perp \beta$

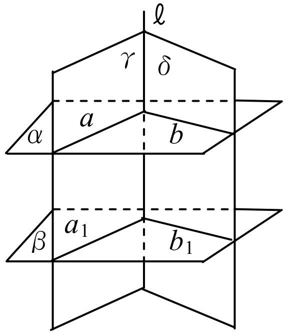


그림 6-16

례 3. 바른6면체 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$에서 옆모서리 AA_1과 CC_1의 가운데점을 M, N이라고 하면 $DB_1 \perp MN$이다. 왜 그런가?

(풀이) 바른6면체의 옆모서리들은 밑면에 수직이므로 서로 평행이다.(그림 6-17)

따라서 $AA_1 // CC_1$

그리고 두 밑면은 모서리에 수직이므로 서로 평행이다. 따라서 AA_1, CC_1을 지나는 평면이 두 밑면과 사귀는 선은 서로 평행이다. 즉

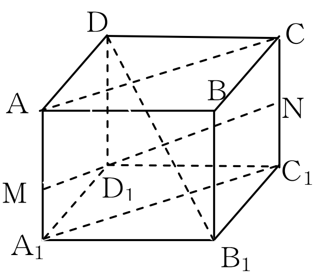


그림 6-17

$$AC /\!/ A_1C_1$$

또한 AA_1이 밑면과 수직이므로

$$AA_1 \perp A_1C_1$$

이리하여 AA_1C_1C는 직4각형이라는것을 알수 있다.

MN은 직4각형 AA_1C_1C의 중간선이므로

$MN /\!/ A_1C_1$, $D_1B_1 \perp A_1C_1$, D_1B_1=사영$_{\text{밑면}}$ DB_1이므로

$$DB_1 \perp A_1C_1$$

따라서 $MN \perp DB_1$

문 제

1. 직선 m, n과 평면 α, β가 있다. 다음의 명제에서 옳은것을 갈라내여라.

1) $m \perp \alpha$, $n \perp \beta$, $m /\!/ n \rightarrow \alpha /\!/ \beta$

2) $m \perp \alpha$, $n \perp \beta$, $m \perp n \rightarrow \alpha \perp \beta$

3) $m /\!/ \alpha$, $\alpha \perp \beta \rightarrow m \perp \beta$

4) $\alpha \perp \beta$, $m \perp \beta \rightarrow m /\!/ \alpha$

2. 평면 α, β가 직선 ℓ에서 사귄다. 사귐선 ℓ의 한 점 M을 지나며 평면 α, β에 놓이는 두 반직선 a, b사이의 각이 취하는 범위는 아래의 어느 경우인가?

1) $[0°, 90°)$ 2) $(0°, 90°]$

3) $[0°, 90°]$ 4) $(0°, 180°)$

5) $[0°, 180°]$ 6) 가늠할수 없다

3. 세 직선 a, b, c가 평면 α에 놓여있다. 직선 m은 a, b와는 수직이고 c와는 수직이 아니다. 다음것을 밝혀라.

1) a와 b의 자리관계 2) m과 α의 자리관계

4. 한 직선이 평면 α에 놓여있는 다음과 같은 두 직선과 각각 수직일 때 그 직선과 평면은 서로 수직인가?

1) 3각형의 두 변 2) 제형의 두 밑변 3) 원의 두 직경

5. 두 평행평면가운데서 하나에 수직이 아닌 직선은 다른것과도 수직이 아니다. 왜 그런가?

6. ▱ABCD의 대각선의 사귐점 O를 지나면서 4각형평면과 사귀는 선분 OM을 MA=MC, MB=MD 되게 그었다. 이때 OM은 4각형평면에 수직이라는것을 밝혀라.

7. 빗변이 AB=9cm인 두 직2등변3각형 ABC와 ABC_1이 서로 수직으로 사귀였다. CC_1을 구하여라.

련습문제

1. 주어진 직선밖의 한 점을 지나면서 이 직선과 사귀는 모든 직선들은 한 평면에 놓인다. 왜 그런가?

2. 직선 AB와 CD가 한 평면에 놓여있지 않으면 직선 AC와 BD도 한 평면에 놓여있지 않다. 증명하여라.

3. 어느 네 점도 한 평면에 놓여있지 않는 6개의 점은 몇개의 평면을 결정하는가?

4. 세 평면 α, β, γ가 하나의 공통점 A를 가진다. 이 세 평면의 자리관계를 밝혀라.

5. 두 평면 α, β가 평면 γ와 각각 평행이면 α, β는 서로 평행이다. 증명하여라.

6. 평면 $\alpha // \beta$이고 α에 놓인 ▱ABCD의 정점들을 각각 지나는 평행직선들이 β와의 사귐점을 A_1, B_1, C_1, D_1이라고 하면 $A_1B_1C_1D_1$은 평행4변형이다. 증명하여라.

7. 평면으로부터 6cm 떨어진 한 점에서 그 평면에 그은 빗선의 길이는 10cm이다. 그 빗선의 사영의 길이를 구하여라.

8. 점 O를 지나는 세 직선 a, b, c가 둘씩 서로 수직이면 이 직선들이 둘씩 결정하는 세 평면 α, β, γ는 둘씩 서로 수직이다. 왜 그런가? 그 거꿀도 성립하는가?

9. 직선 ℓ에서 서로 수직으로 사귀는 두 평면 α, β가 있다. 이 평면들밖의 한 점 A에서 α, β에 그은 수직선의 밑점을 P, Q, 사귐선 ℓ에 그은 수직선의 밑점을 R라고 하면 4각형 APRQ는 직4각형이다. 증명하여라.

10. 서로 수직인 두 평면에 각각 점 P, Q가 있다. 이 점으로부터 평면의 사귐선까지의 거리는 $PP_1=14$cm, $QQ_1=7$cm이다. PQ=21cm일 때 P_1Q_1을 구하여라.

제2절. 다 면 체

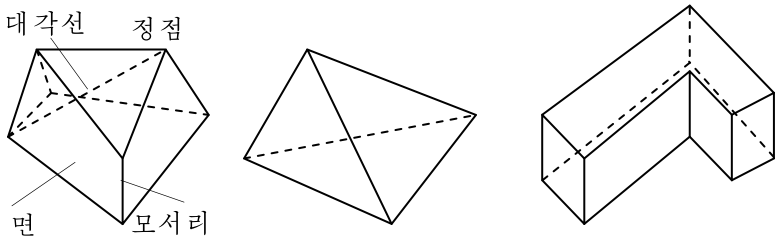
1. 각기둥

몇개의 다각형으로 둘러막힌 공간의 부분을 **다면체**라고 부른다.

다면체를 이루는 다각형을 그 다면체의 **면**, 면들이 사귀는 공통변을 **모서리**, 모서리들의 사귐점을 **정점**이라고 부른다.

한 면에 들어있지 않는 두 정점을 맺는 선분을 그 다면체의 **대각선**이라고 부른다.

다면체의 임의의 두 점을 맺는 선분이 늘 다면체에 들어있을 때 그 다면체를 볼록다면체, 그렇지 않으면 오목다면체라고 부른다.



볼록다면체　　　　　　　　오목다면체

그림 6-18

다면체라고 하면 볼록다면체를 말하는것으로 한다.

면이 n개인 다면체를 ***n*면체**라고 부른다.

다면체에서 면의 수가 가장 적은것은 4면체이다.

따라서 n면체라고 할 때 $n \geq 4$이다.

다면체가운데서 모든 면들이 합동인 바른다각형이고 매개 정점에서 나가는 모서리의 수가 같은 다면체를 **바른다면체**라고 부른다.

바른다면체에는 바른4면체, 바른6면체, 바른8면체, 바른12면체, 바른20면체 다섯가지만 있다.

두 면은 평행이고 다른 면들은 모두 한 직선에 평행인 다면체를 **각기둥**이라고 부른다.

여기서 평행인 두 면을 각기둥의 **밑면**, 한 직선에 평행인 면들을 각기둥의 **옆면**이라고 부른다.

두 옆면의 공통변을 각기둥의 **옆모서리**, 두 밑면사이의 거리를 각기둥의 **높이**라고 부른다.

밑면의 변이 n개인 각기둥을 **n각기둥**이라고 부른다.

두 밑면이 다각형 ABCDE, $A_1B_1C_1D_1E_1$인 각기둥을 각기둥 ABCDE $-A_1B_1C_1D_1E_1$과 같이 표시한다.

각기둥은 다음과 같은 성질을 가진다.

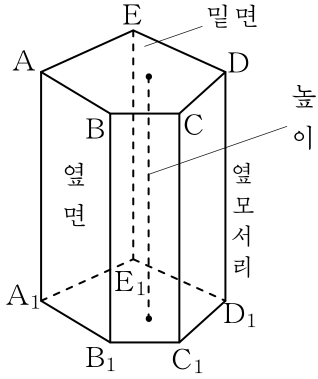


그림 6-19

1) 옆모서리들은 서로 평행이다.
2) 옆면들은 평행 4 변형이다.
3) 두 밑면은 합동이다.

옆모서리가 밑면에 수직인 각기둥을 직각기둥, 수직이 아닌 각기둥을 빗각기둥이라고 부른다.

특히 밑면이 바른다각형인 직각기둥을 바른각기둥이라고 부른다.

각기둥에서 한 옆면에 놓이지 않은 두 모서리를 지나는 평면의 자름면을 그 각기둥의 **대각선면**이라고 부른다.

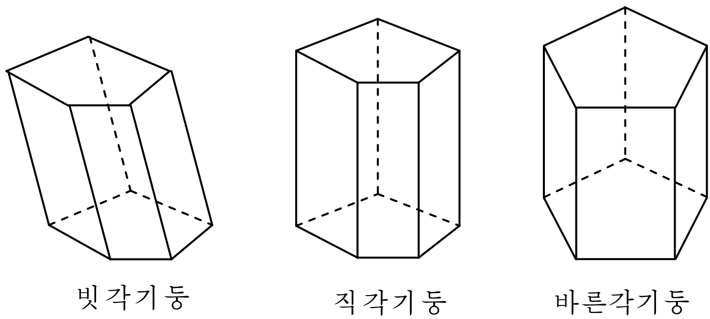


그림 6-20

문 제

1. 다음것은 어떤 도형인가?

1) 직각기둥의 옆면　　2) 바른각기둥의 옆면

2. 빗각기둥의 대각선면은 평행4변형이고 직각기둥의 대각선면은 직4각형이다. 왜 그런가?

3. 각기둥을 밑면에 평행인 평면으로 자르면 자름면은 밑면과 합동이다. 증명하여라.

4. 각기둥을 모서리에 평행인 평면으로 자르면 자름면은 평행4변형이다. 증명하여라.

5. 다음 명제에서 옳은것은 어느것인가?

1) 옆면들이 다 직4각형이며 린접한 두 옆면사이의 각이 다 같은 각기둥은 바른각기둥이다.

2) 밑면에 평행인 임의의 자름면이 밑면과 합동이면 그 도형은 직각기둥이다.

3) 3각기둥의 임의의 자름면은 3각형과 4각형이다.

4) 4각기둥의 대각선면은 6개이다.

6. 빗3각기둥의 옆모서리의 길이는 8, 옆모서리와 밑면이 이루는 각은 60°, 매 옆모서리사이의 거리는 각각 3, 4, 5이다. 이 각기둥의 체적 및 겉면적을 구하여라.

2. 평행6면체

밑면이 평행4변형인 각기둥을 **평행6면체**라고 부른다.

평행6면체가운데서 옆모서리가 밑면에 수직인것을 **직평행6면체**, 수직이 아닌것을 **빗평행6면체**라고 부른다.

특히 밑면이 직4각형인 직평행6면체를 **직6면체**라고 부른다.

바른6면체는 모서리들이 다 같은 직6면체이다.

정의에 의하여 평행6면체는 다음과 같은 성질을 가진다.

① 평행6면체의 모든 면은 평행4변형이다.

② 직평행6면체의 옆면들은 직4각형이다.

③ 직6면체의 모든 면은 직4각형이다.

④ 바른6면체의 모든 면은 합동인 바른4각형이다.

⑤ 맞은면들은 평행이며 합동이다.

평행6면체는 이밖에도 다음과 같은 성질을 가진다.

정리1. 평행6면체에서 대각선들은 모두 한 점에서 사귀고 그 점에서 2등분된다.

(증명) AD와 B_1C_1은 각각 A_1D_1과 평행이므로 ADC_1B_1은 한 평면에 놓인다. 이 4각형에서 $AD /\!\!/ A_1D_1 /\!\!/ B_1C_1$이므로 4각형 ADC_1B_1은 평행4변형이다.

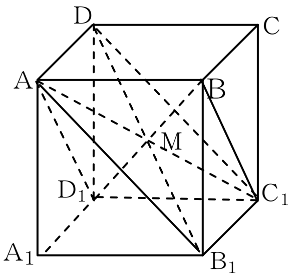


그림 6-21

따라서 대각선 AC_1과 DB_1은 사귐점 M에서 2등분 된다.
마찬가지로 4각형 ABC_1D_1도 평행4변형이고 대각선 BD_1은 대각선 AC_1의 가운데점 M을 지나고 그 점에서 2등분 된다.
결국 대각선 AC_1, DB_1, BD_1은 한 점 M에서 사귀며 그 점에서 2등분 된다.
마찬가지로 대각선 A_1C가 점 M을 지나며 그 점에서 2등분 된다는것을 밝힐수 있다.

례. 평행6면체를 그림 6-22와 같은 평면으로 자르면 그 자름면은 평행4변형이다. 증명하여라.

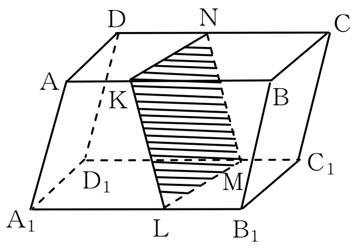


그림 6-22

(증명) 맞은면 ABCD와 $A_1B_1C_1D_1$은 평행이므로 자름면과의 사귐선

$KN /\!\!/ LM$ (1)

또한 맞은면 AA_1B_1B와 DD_1C_1C는 평행이므로 자름면과의 사귐선 $KL /\!\!/ NM$ (2)

따라서 (1), (2)로부터 자름면 KLMN은 평행4변형이다.

문 제

1. 모임 M={바른4각기둥}, N={직4각기둥}, P={직6면체}, Q={직평행6면체}이다. 다음 모임들사이의 관계에서 옳은것은 어느것인가?

1) M⊂P⊂N⊂Q 2) M⊂P⊂Q⊂N

3) P⊂M⊂N⊂Q 4) P⊂M⊂Q⊂N

2. 직6면체의 대각선의 길이는 모두 같다는것을 밝혀라.

3. 바른6면체의 한 모서리는 a이다. 한 정점으로부터 대각선까지의 거리를 구하여라.

4. 바른6면체 ABCD-A′B′C′D′에서 모서리 AB, BB′, B′C′, C′D′, D′D, DA의 가운데점을 각각 L, M, N, P, Q, R라고 할 때 6각형 LMNPQR는 바른6각형임을 증명하여라.

3. 각뿔과 각뿔대

> 다각형과 다각형평면밖의 한 점을 다각형의 정점들과 맺어서 얻은 3각형들을 면으로 하는 다면체를 **각뿔**이라고 부른다.

여기서 다각형을 각뿔의 **밑면**, 한 점을 각뿔의 **정점**, 3각형들을 각뿔의 **옆면**, 정점과 밑면의 정점들을 맺는 선분들을 각뿔의 **모서리**, 정점에서 밑면까지의 거리를 **높이**라고 부른다.

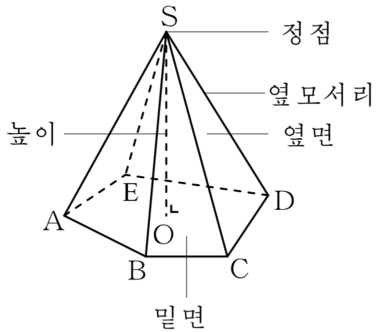


그림 6-23

정점이 S이고 밑면이 다각형 ABCDE인 각뿔을 각뿔 S-ABCDE와 같이 표시한다.

밑면의 변이 n개인 각뿔을 **n각뿔**이라고 부른다.

밑면이 바른다각형이고 옆모서리의 길이가 모두 같은 각뿔을 **바른각뿔**이라고 부른다.

각뿔의 정의로부터 각뿔의 밑면은 다각형이고 옆면은 3각형이다.

> 각뿔을 밑면에 평행인 평면으로 자를 때 밑면과 자름면사이의 부분을 **각뿔대**라고 부른다.

여기서 평행인 두 면을 각뿔대의 **밑면**, 나머지 면들을 각뿔대의 **옆면**, 두 밑면사이의 거리를 각뿔대의 **높이**라고 부른다. n각뿔로부터 얻어지는 각뿔대를 **n각뿔대**, 바른각뿔로부터 얻어지는 각뿔대를 **바른각뿔대**라고 부른다.

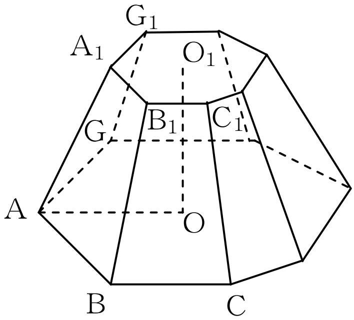


그림 6-24

밑면이 $ABC\cdots G$, $A_1B_1C_1\cdots G_1$인 각뿔대를 각뿔대 $ABC\cdots G-A_1B_1C_1\cdots G_1$과 같이 표시한다.

알아보기 3각뿔을 밑면에 평행인 평면으로 자르면 자름면은 밑면의 모양과 같은가? 또 4각뿔일 때는 어떤가?

> **정리 2.** 각뿔을 밑면에 평행인 평면으로 자르면 자름면은 밑면과 닮은 다각형이다.

(증명) 각뿔 $S-ABC\cdots F$를 밑면에 평행인 평면으로 잘랐을 때 자름면을 $A_1B_1C_1\cdots F_1$이라고 하자. 정점 S에서 밑면과 자름면까지의 거리를 각각 SO, SO_1이라고 하자.(그림 6-25)

자름면 ∥밑면이므로 이 밑면들과 옆면의 사귐선들은 서로 평행이다. 즉

$AB \parallel A_1B_1$, $BC \parallel B_1C_1$, $\cdots$, $EF \parallel E_1F_1$

따라서

$\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$, $\cdots$, $\angle F=\angle F_1$

그러므로

다각형 $ABC\cdots F \backsim$ 다각형 $A_1B_1C_1\cdots F_1$

례 1. 각뿔에서 평행자름면과 밑면의 면적의 비는 정점으로부터 두 밑면까지의 거리의 비의 2제곱과 같다.

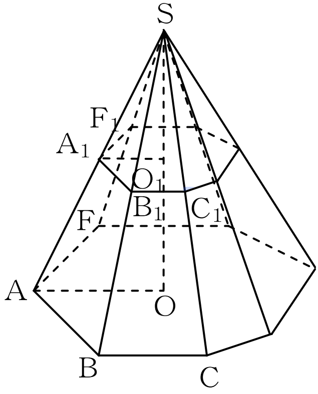


그림 6-25

(증명) 그림 6-25에서 옆면 SAB를 잡으면

$SA_1 : SA = A_1B_1 : AB$

한편 AOS에서

$SA_1 : SA = SO_1 : SO$

따라서 자름면과 밑면의 닮음비는

$SO_1 : SO$

따라서

$$\frac{S(A_1B_1C_1\cdots F_1)}{S(ABC\cdots F)} = \left(\frac{SO_1}{SO}\right)^2$$

례 2. 각뿔의 밑면은 평행4변형인데 그 변들은 3cm, 7cm이고 한 대각선은 6cm이다. 각뿔의 높이는 4cm인데 밑면의 대각선의 사귐점을 지난다. 각뿔의 모서리들을 구하여라.

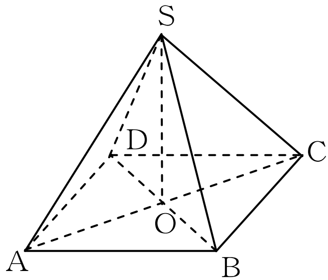


그림 6-26

(풀이) 평행4변형 ABCD(밑면)에서 AB=7cm, SO=4cm, AD=3cm, BD=6cm이라고 하면

$AC^2 + BD^2 = 2 \cdot (AB^2 + AD^2)$ (코시누스정리에 의하여)

$AC^2 + 6^2 = 2 \cdot (7^2 + 3^2) = 116$

$AC^2 = 116 - 36 = 80$, $AC = 4\sqrt{5}$

따라서

$AO = 2\sqrt{5}$, $BO = 3$

그리고 $SO \perp OA$, $SO \perp OB$이므로 $\triangle SOA$와 $\triangle SOB$는 직3각형이다.

따라서

$$SA=\sqrt{SO^2+AO^2}=\sqrt{4^2+(2\sqrt{5})^2}=\sqrt{36}=6\,(cm)$$

$$SB=\sqrt{SO^2+BO^2}=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5\,(cm)$$

문 제

1. 바른각뿔을 밑면에 평행인 평면으로 자르면 자름면은 바른다각형이다. 왜 그런가?
2. 바른각뿔대의 옆면은 바른제형이다. 왜 그런가?
3. 다음 명제에서 옳은것을 찾아보아라.
   1) 옳은 명제 《4각기둥은 6면체이다.》의 거꿀명제는 옳은 명제이다.
   2) 옳은 명제 《바른각뿔대의 옆면들은 바른제형이다.》의 거꿀명제는 옳지 않은 명제이다.
   3) 바른4각뿔의 한 모서리에 평행인 임의의 자름면은 3각형과 4각형이다.
4. 바른각뿔대의 옆면적은 두 밑면의 둘레의 길이의 합과 옆면의 높이와의 적의 $\frac{1}{2}$과 같다. 증명하여라.
5. 밑면적은 400cm^{2}인 각뿔의 높이를 4등분하고 그 점들을 지나며 밑면에 평행인 평면으로 각뿔을 잘랐다. 자름면의 면적을 구하여라.
6. 3각뿔 S-ABC의 네개의 모서리 SA, AB, BC, CS의 가운데점을 각각 K, L, M, N이라고 할 때 SB=AC이면 KM⊥LN이라는것을 증명하여라.

련습문제

1. 한 변의 길이가 a인 바른4면체가 있다. 서로 맞대고있는 두 모서리는 수직으로 어긴다는것을 증명하여라. 그리고 이 두 모서리사이의 거리를 구하여라.
2. 직평행6면체의 밑면은 이웃한 두 변이 6cm, 8cm이고 그사이의 각이 30°, 옆모서리는 5cm이다. 겉면적을 구하여라.

3. 직6면체의 한 정점에서 나가는 세 모서리의 비가 3:7:8이고 걸면적은 808cm^{2}이다. 이 직6면체의 체적을 구하여라.

4. 4면체 ABCD에서 모서리 AD와 BC가 수직이라면 AD, BC에 각각 평행인 평면으로 잘랐을 때 자름면은 어떤 4각형이 되겠는가?

5. 평행6면체 ABCD-$A_1B_1C_1D_1$에서 모서리 AB, BB_1, B_1C_1 C_1D_1, D_1D, DA의 가운데점 L, M, N, P, Q, R는 한 평면에 놓인다는것을 증명하여라.

6. 직3각기둥의 밑면의 변들은 각각 10cm, 17cm, 21cm이고 높이는 10cm이다. 밑면의 제일 작은 높이와 옆모서리를 지나는 평면으로 각기둥을 잘랐다. 자름면의 면적을 구하여라.

7. 밑면의 한 변이 a이고 높이가 b인 바른4각기둥을 밑면의 한 정점을 지나면서 밑면과 45° 각을 이루는 평면으로 잘랐다. 이때 자름면의 면적을 구하여라. $(\sqrt{2}a > b > a)$

8. 각뿔의 밑면에 평행인 자름면이 그 각뿔의 높이를 3:4(정점으로부터 시작하여)의 비로 나눈다. 자름면의 면적이 밑면적보다 200cm^2 작다. 각뿔의 밑면적을 구하여라.

9. 바른4면체의 한 모서리를 지나는 임의의 자름면의 면적과 밑면의 면적과의 비의 범위를 아래에서 찾아보아라.

ㄱ : $(0, 1)$　　ㄴ : $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$　　ㄷ : $\left[\sqrt{\frac{2}{3}}, 1\right)$

ㄹ : $\left(1, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$　　ㅁ : $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

10. 각뿔의 밑면은 바른4각형인데 각뿔의 높이는 밑면의 한 정점을 지난다. 밑면의 한 변이 20cm, 각뿔의 높이가 21cm일 때 옆면적을 구하여라.

11. 바른4각뿔이 있다. 밑면의 한 변은 10cm, 옆면과 밑면사이의 각은 40°이다. 옆모서리와 밑면이 이루는 각을 구하여라.

12. 바른4각뿔의 밑면의 한 변은 a, 각뿔의 옆모서리와 높이사이의 각은 30°이다. 각뿔의 밑면의 한 정점을 지나며 그 정점의 맞은편 옆모서리에 수직인 자름면의 면적을 구하여라.

13. 밑면의 한 변이 각각 20cm, 36cm이고 높이가 30cm인 바른4각뿔대모양의 통을 만들려고 한다. 거기에 드는 철판의 면적을 구하여라.(뚜껑은 없다.)

14. 평행6면체의 밑면은 바른4각형이고 웃밑면의 한 정점에서 아래밑면의 매 정점까지의 거리는 같다. 밑면의 한 변은 a, 옆모서리가 b일 때 6면체의 겉면적과 체적을 구하여라.

제3절. 회전체

1. 원기둥

다문선으로 둘러싸인 평면도형 F가 있다. 이 평면도형이 놓여있는 평면 α를 평면의 한 직선 ℓ주위로 회전시킬 때 평면도형이 만드는 도형을 **회전체**라고 부른다.

회전체의 정의로부터 회전체를 축을 지나는 평면으로 자르면 자름면은 축에 관하여 대칭이라는것을 알수 있다.

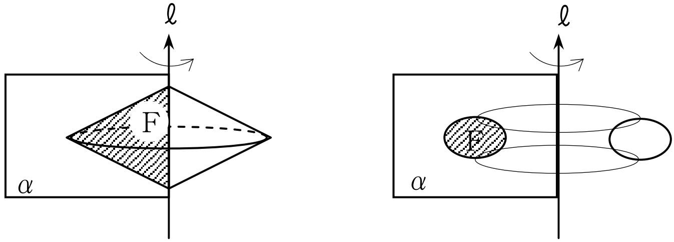


그림 6-27

직4각형을 그 한 변을 축으로 하여 회전시킬 때 얻어지는 회전체를 **직원기둥**이라고 부르고 이것을 간단히 **원기둥**이라고 부르겠다. 여기서 축에 수직인 변이 그리는 면(원)을 원기둥의 **밑면**, 축에 평행인 변을 원기둥의 **모선**, 모선이 그리는 면을 원기둥의 **옆면**, 두 밑면사이의 거리를 원기둥의 **높이**라고

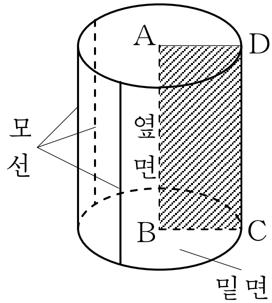


그림 6-28

부른다. 원기둥의 정의로부터 원기둥을 축을 지나는 평면으로 자르면 자름면은 직4각형이고 축에 수직인 평면으로 자르면 자름면은 원이라는것을 곧 알수 있다.

정리1. 원기둥을 축에 평행인 평면으로 자르면 자름면은 직4각형이다.

례 1. 밀면의 반경이 2cm이고 높이가 3cm인 원기둥을 축으로부터 1cm만 한 거리에 있는 축에 평행인 평면으로 잘랐다. 자름면의 면적을 구하여라.

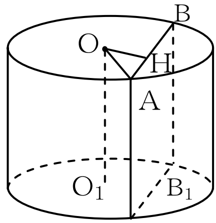


그림 6-29

(풀이) 자름면 AA_1B_1B는 직4각형이다.(정리 1)

$$AB=2\sqrt{OA^2-OH^2}=2\sqrt{2^2-1^2}=2\sqrt{3}$$

$$AA_1=OO_1=3$$

$$S(AA_1B_1B)=AB\cdot AA_1=2\sqrt{3}\cdot 3=6\sqrt{3}(cm^2)$$

례 2. 반경이 r인 원기둥에 바른6면체가 내접하였다. 이 바른6면체의 대각선의 길이를 구하여라.

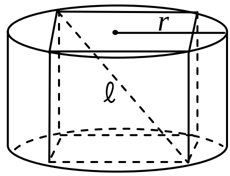


그림 6-30

(풀이) 내접바른6면체의 모서리를 a라고 하면 바른6면체의 성질로부터 $2a^2=(2r)^2$

$$a^2=2r^2(a=\sqrt{2}r)$$

대각선의 길이를 ℓ이라고 하면

$$\ell^2=(2r)^2+a^2=4r^2+2r^2=6r^2$$

$$\ell=\sqrt{6}r$$

문 제

1. 원기둥의 축에 평행이며 밀면의 원둘레와 하나의 공통점을 가지는 평면을 원기둥의 **접평면**이라고 부른다. 원기둥의 접평면은 원기둥과 모선에서 접한다는것을 밝혀라.

2. 원기둥의 축을 지나는 자름면은 바른4각형인데 대각선의 길이는 a이다. 이 원기둥의 옆면적과 체적을 구하여라.

3. 원기둥을 축에 평행인 평면으로 잘랐다. 이때 생긴 웃밑면의 자름선(활줄)의 길이는 4 cm이다. 원기둥의 밑면의 반경이 5cm일 때 축으로부터 자름면까지의 거리를 구하여라.

4. 원기둥에 직6면체가 내접하였다. 이 직6면체의 밑면들은 각각 원기둥의 밑면에 놓인다. 직6면체의 밑면의 이웃한 두 변의 길이는 3cm, 4cm이고 높이는 5cm이다. 원기둥의 겉면적과 체적을 구하여라.

2. 원뿔과 원뿔대

직3각형을 그 한 직각변을 축으로 하여 회전시킬 때 얻어지는 회전체를 **직원뿔**이라고 부르고 이것을 간단히 **원뿔**이라고 부른다.

여기서 축에 수직인 직각변이 그리는 면을 원뿔의 **밑면**, 빗변을 원뿔의 **모선**, 모선이 그리는 면을 원뿔의 **옆면**, 정점에서 밑면까지의 거리를 원뿔의 **높이**라고 부른다.

정점에서 밑면에 내린 높이의 밑점은 밑면의 중심에 놓인다. 원뿔의 정의로부터 원뿔의 축을 지나는 자름면은 2등변3각형이고 축에 수직인 자름면은 원이라는것이 곧 나온다.

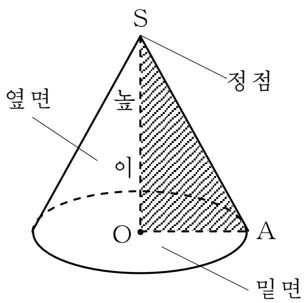


그림 6-31

정리 2. 원뿔을 정점을 지나는 평면으로 자르면 자름면은 2등변3각형이다.

(증명) 자름면이 밑면의 원둘레와의 사귐점을 A, B라고 하자. 정점 S와 A는 자름면의 점이므로 직선 SA는 자름면에 놓인다.

또한 SA는 직3각형 SOA의 빗변이므로 원뿔의 정의로부터 원뿔의 옆면에 놓인다.

따라서 SA는 원뿔의 옆면과 자름면의 사귐선이다. SB도 마찬가지이다.

그리고 SA와 SB는 합동인 직3각형의 빗변이므로

$$SA=SB$$

따라서 자름면은 2등변3각형이다.(그림 6-32)

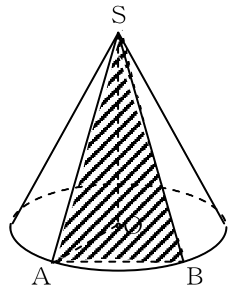


그림 6-32

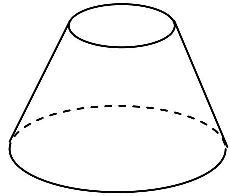


그림 6-33

원뿔을 밑면에 평행인 평면으로 자를 때 자름면과 밑면사이의 부분을 **원뿔대**라고 부른다. 각뿔대에서처럼 원뿔대에서도 밑면, 옆면, 높이를 생각한다.(그림 6-33)

례 1. 밑면의 반경이 3cm, 높이가 4cm인 원뿔의 정점을 지나며 밑면의 중심에서 2cm의 거리에 있는 활줄을 지나는 평면으로 원뿔을 잘랐다. 자름면의 둘레의 길이를 구하여라.(그림 6-34)

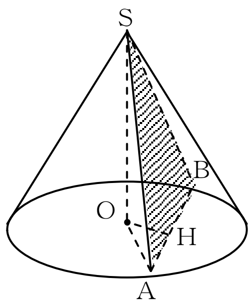


그림 6-34

(풀이) 자름면 SAB는 2등변3각형이다.(정리 2)

ΔOAB는 2등변3각형이고

$OH \perp AB$이므로

$$AB = 2\sqrt{OA^2 - OH^2} = 2\sqrt{3^2 - 2^2} = 2\sqrt{5}$$

ΔSOA는 직3각형이므로

$$SA = \sqrt{SO^2 + OA^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

따라서

$$\ell(\mathrm{SAB}) = \mathrm{AB} + 2 \cdot \mathrm{SA} = 2\sqrt{5} + 2 \cdot 5 = 2(5+\sqrt{5})\ (\mathrm{cm})$$

문 제

1. 밑면의 반경이 r이고 높이가 h인 원뿔을 밑면에 평행이고 정점으로부터 d만 한 거리에 있는 평면으로 잘랐다. 자름면의 면적을 구하여라.
2. 원뿔의 모선이 13cm, 높이가 12cm이다. 원뿔의 높이와 어기면서 밑면에 평행인 직선에서 밑면까지의 거리는 6cm, 높이까지의 거리는 2cm이다. 이 직선의 원뿔아낙에 든 부분의 길이를 구하여라.
3. 원뿔대의 모선의 길이는 $2a$이고 밑면과 $60°$의 각을 이룬다. 한 밑면의 반경은 다른 밑면의 반경의 2배이다. 두 밑면의 반경을 구하여라.

3. 구

반원을 그 직경을 축으로 하여 한바퀴 회전시켰을 때 생기는 회전체를 **구**라고 부른다. 이때 반원둘레가 그리는 면을 **구면**이라고 부른다.

여기서 반원의 활줄의 가운데점을 구의 **중심**, 구의 중심과 구면의 한 점을 맺는 선분을 구의 **반경**, 구의 중심을 지나는 직선이 구면과 사귀여 생기는 선분을 구의 **직경**이라고 부른다.

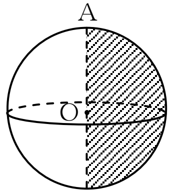


그림 6-35

구의 정의로부터 구의 직경을 지나는 평면으로 구를 자르면 자름면은 원이라는것을 알수 있다.

정리 3. 구를 평면으로 자르면 자름면은 원이다.

(증명) 구의 중심 O에서 자름면 α에 그은 수직선의 밑점을 M, 자름면과 구면의 사귐선의 한 점을 P라고 하면 OM=d는 일정하고 OP=r는 구의 반경이다.

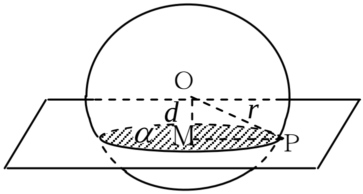


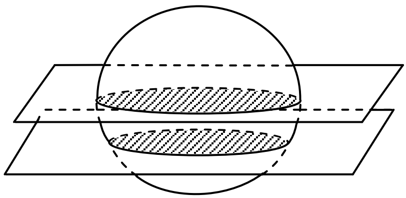
그림 6-36

따라서 직3각형 OMP에서

MP=$\sqrt{r^2-d^2}$:일정

즉 P는 일정한 점 M을 중심으로 하고 반경이 $\sqrt{r^2-d^2}$인 원둘레의 점이다.(그림 6-36)

구를 중심을 지나는 평면으로 자를 때 생기는 원을 **큰 원**, 중심을 지나지 않는 평면으로 자를 때 생기는 원을 **작은 원**이라고 부른다.(그림 6-37)


그림 6-37

구를 한 평면으로 잘랐을 때 생기는 구의 매 부분을 **결구**라고 부르고 자름면을 결구의 **밑면**, 결구의 밑면에 수직인 직경에서 결구안에 든 선분을 결구의 **높이**라고 부른다. 그리고 결구에서 구면부분을 **구관(구면갓)**이라고 부른다.

구를 평행인 두 평면으로 잘랐을 때 평행평면사이에 끼워있는 구의 부분을 **구대**라고 부르고 두 자름면을 구대의 **밑면**, 밑면사이의 거리를 구대의 **높이**라고 부른다.

례 1. 반경이 3cm인 구를 평면으로 잘라서 반경이 2cm인 원을 얻으려고 한다. 구의 중심으로부터 얼마만한 거리에 있는 평면으로 잘라야 하겠는가?

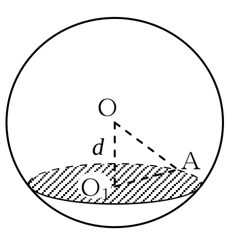


그림 6-38

(풀이) 구의 중심에서 자름면까지 거리를 d라고 하자.

O와 자름면의 중심 O_1을 맺으면

$OO_1 \perp$ 자름면이므로 $OO_1 = d$, 자름면의 경계인 원둘레의 한 점을 A라고 하면

$$O_1A=2,\ OA=3$$

직3각형 OO_1A에서

$$d^2 = 3^2 - 2^2 = 5,\quad d = \sqrt{5}(\mathrm{cm})$$

례 2. 그림 6-39와 같이 반경이 r인 구에 원기둥이 외접하였다. 구면의 면적과 원기둥의 걸면적의 비를 구하여라.

(풀이) 구와 원기둥을 원기둥의 축을 지나는 평면으로 자르면 자름면은 원과 원에 외접한 바른4각형이다. 따라서 원기둥의 밑면의 반경은 r, 높이는 $2r$이다.
구면의 면적을 S, 원기둥의 걸면적을 S′라고 하면

$$\frac{S}{S'} = \frac{4\pi r^2}{2\pi r^2 + 2\pi r 2r} = \frac{4\pi r^2}{6\pi r^2} = \frac{2}{3}$$

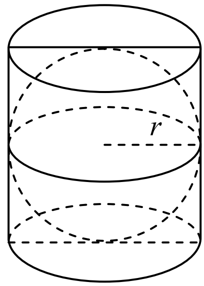


그림 6-39

문 제

1. 구면의 한 점을 지나며 그 점을 지나는 구의 반경에 수직인 평면을 구의 **접평면**이라고 부른다. 구의 접평면은 구와 한점만을 공통으로 가진다는것을 밝혀라.
2. 반경이 8cm인 구를 중심으로부터 2cm만 한 거리에 있는 평면으로 잘랐다. 자름면의 면적을 구하여라.
3. 구면에 원기둥이 내접하였다. 구의 반경은 6cm이고 원기둥의 밑면의 반경은 3cm이다. 원기둥의 체적을 구하여라.
4. 구면에 바른4면체가 내접하였다. 바른4면체의 한 모서리가 a일 때 구면의 걸면적과 체적을 구하여라.

련습문제

1. 원기둥의 높이는 8cm, 밑면의 반경은 5cm이다. 이 원기둥을 축에 평행인 평면으로 잘랐는데 자름면은 바른4각형이다. 축으로부터 자름면까지 거리를 구하여라.

2. 원기둥의 밀면의 반경과 높이가 같다. 원기둥안에 바른6각기둥이 외접하였다. 그 옆면의 대각선과 축사이의 각을 구하여라.

3. 원기둥의 높이는 2cm, 밀면의 반경은 7cm이다. 이 원기둥안에 바른4각형을 끼워넣었는데 두 정점은 웃밑면의 원둘레에 있고 두 정점은 아래밑면의 원둘레에 있다. 바른4각형의 변의 길이를 구하여라.

4. 원뿔의 밀면의 반경은 r이다. 이 원뿔을 축을 지나는 평면으로 자르면 자름면은 바른3각형이 된다. 이 원뿔을 정점을 지나는 평면으로 잘랐을 때 자름면에서 모선이 이루는 각은 θ이다. 이 자름면의 면적을 구하여라.

5. 반경이 r인 금속구를 녹여서 옆면적이 밀면의 면적보다 3배 큰 원뿔모양의 그릇안에 가득 채워넣었다. 이때 원뿔의 높이를 구하여라.

6. 원뿔의 높이가 h이다. 이 원뿔을 밀면에 평행인 평면으로 자르되 자름면의 면적이 밀면적의 절반으로 되게 하려면 정점으로부터 얼마 떨어진 평면으로 잘라야 하는가?

7. 원뿔을 높이를 지나는 평면으로 잘랐다. 이 자름면에서 높이의 가운데점을 지나며 모선에 평행인 직선을 그었다. 이 평행선분의 길이를 구하여라. 원뿔의 높이는 h이고 밀면의 반경은 r이다.

8. 원뿔대의 밀면의 반경은 각각 3cm, 6cm이고 높이는 4cm이다. 모선의 길이를 구하여라.

9. 원뿔대의 밀면의 반경은 각각 r_1, r_2이고 모선이 밀면과 이루는 각은 45°이다. 높이를 구하여라.

10. 원뿔대의 밀면의 반경은 각각 3cm, 7cm이고 모선의 길이는 5cm이다. 축을 지나는 자름면의 면적을 구하여라.

11. 원뿔대의 밀면의 면적은 M, N이다. 밀면에 평행이며 높이의 가운데점을 지나는 자름면의 면적을 구하여라.

12. 반경이 41cm인 구를 중심으로부터 9cm 거리에 있는 평면으로 잘랐다. 자름면의 면적을 구하여라.

13. 구면에 세 점 A, B, C가 주어졌다. 이 점들사이의 거리는 6cm, 8cm, 10cm이고 구의 반경은 13cm이다. 구의 중심으로부터 세 점을 지나는 평면까지의 거리를 구하여라.

복습문제

1. 그림 6-40에서 직선 AB는 평면 α 와 β의 사귐선이고 직선 a는 평면 α에, 직선 b는 평면 β에 있다.
이때 어떤 조건에서 $a /\!/ b$일수 있는가?

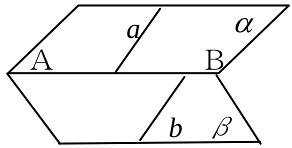


그림 6-40

2. 직선 a, b와 평면 α가 있다. 다음의 명제에서 옳은 명제를 찾아보아라.

1) $a /\!/ \alpha$, $a /\!/ b \Rightarrow b /\!/ \alpha$이다.

2) $a \subset \alpha$, $b \cap \alpha = \mathrm{B}$이면 a와 b는 서로 다른 평면에 있다.

3) $a /\!/ b$, $b \perp \alpha \Rightarrow b /\!/ \alpha$

4) $a \perp b$, $a \perp \alpha \Rightarrow b /\!/ \alpha$

3. 두 평면 α와 β의 사귐선은 m이고 직선 a는 평면 α에 있다. 직선 a와 m의 사귐점이 A, 어떤 직선 b와 평면 β와의 사귐점이 B(A$\neq$B)일 때
1) $b \subset \alpha$인 경우
2) $b \subset \beta$인 경우
a와 b는 어떤 자리관계에 있는가?

4. 빗변이 a이고 한 뾰족각이 θ인 직3각형이 그 빗변을 지나는 평면과 각 φ를 이룬다. 직각의 정점에서 그 평면까지 거리를 구하여라.

5. 직선 a는 평면 α와 β에 놓이지 않으면서 그 두 평면의 사귐선 l에 평행이다. a와 α, a와 β는 어떤 자리관계에 있는가?

6. 한 직선 l이 평면 α에 있는 다음것들과 수직이면 $l \perp \alpha$이라고 말할수 있는가?

1) α에 있는 3각형의 두 변

2) α에 있는 제형의 두 변

3) α에 있는 원의 두 직경

4) α에 있는 바른6각형의 두 대각선

7. 평행 6 면체 ABCD-$A_1B_1C_1D_1$에서 다음것을 밝혀라.

1) 평면 BDA_1 (　) 평면 CB_1D_1

① 평행　　　　　　② 수직

③ 수직이 아니다　　④ 가늠할수 없다

2) 선분 AC_1은 평면 BDA_1와 평면 CB_1D_1에 의하여 ( )

① 3개 부분들로 나누인다.　② 3등분 된다.

8. 바른4각기둥의 대각선은 14cm이고 옆면의 대각선은 10cm이다. 각기둥의 겉면적을 구하여라.

9. 직평행6면체의 두 대각면의 면적은 $112cm^2$, $144cm^2$이고 밑면의 변들은 8cm, 14cm이다. 이 6면체의 옆면적을 구하여라.

10. 바른4각기둥의 대각선은 25cm이고 그 옆면의 대각선은 20cm이다. 각기둥의 높이를 구하여라.

11. 바른4각뿔의 밑면의 한 변은 2cm이고 밑면과 옆면사이의 각은 60°이다. 각뿔의 옆면적을 구하여라.

12. 각뿔의 높이는 16cm, 밑면적은 $512cm^2$이다. 밑면에 평행이고 면적이 $50cm^2$인 자름면과 밑면사이의 거리를 구하여라.

13. 1) 바른4각뿔에서 밑면의 변이 a, 옆모서리와 밑면사이의 각이 φ일 때 그 대각면의 면적을 구하여라.

2) 바른6각뿔의 밑면의 한 변은 a, 각뿔의 높이는 H이다. 대각면의 면적을 구하여라.

14. 바른4각뿔의 밑면의 한 변은 40cm, 높이는 24cm이다. 높이를 정점으로부터 3 : 2로 나누는 점을 지나 밑면에 평행인 평면으로 잘라 각뿔대를 얻었다.

1) 각뿔대의 두 밑면의 면적을 구하여라.

2) 각뿔대의 높이를 구하여라.

15. 밑면의 한 변이 a인 바른4각뿔이 있다. 4각뿔의 밑면의 한 변을 지나 그 맞은 옆면에 수직인 평면으로 각뿔을 잘랐을 때 밑면과 자름면사이의 각은 30°였다.

1) 자름면은 무슨 도형인가?

2) 자름면의 면적을 구하여라.

16. 각뿔의 밑면은 바른4각형인데 각뿔의 높이는 그 밑면의 한 정점을 지난다. 밑면의 한 변은 20dm, 각뿔의 높이를 21dm라고 하면 그 옆면적은 얼마인가?

17. 원뿔대의 체적은 V이고 높이는 h이다. 원뿔대의 축을 지나는 자름면의 면적이 S라는것을 알고 원뿔대의 밑면의 반경을 구하여라.

18. 반경이 r인 구에 원뿔이 내접하였다. 원뿔의 축을 지나는 평면으로 잘랐을 때 생긴 3각형의 밑변과 높이와의 비는 $\frac{1}{2}$이다. 원뿔의 밑면의 반경을 구하여라.

19. 반경이 r인 구에 외접하는 원뿔의 밑면의 반경이 $R(R>r)$이다. 두 립체의 체적의 비를 구하여라.

상식

우리 나라 수학자 리상혁의 론문집 《산술관견》

우리 나라 수학자 리상혁(1810-?)은 남병길과 수학을 공동으로 연구하였다.

그는 1855년에 4개의 론문으로 되여있는 론문집 《산술관견》을 출판하였다.

이 론문집은 기하, 대수, 무한수렬의 합 등에 관한 내용으로서 당시 동양에서 최고수준의것이였다. 그렇기때문에 당시 수학자들은 이 론문집에 실린 론문들이 가지는 심오한 내용과 정확한 론리에 대해서는 다른 선진국 수학자들까지도 탄복할것이라고 말하였다고 한다.

복습문제의 답

제1장

1. $y=-\sqrt{\frac{x-1}{x}}\ (x<0,\ x\geq 1)$ **2.** $f(x)=x^2-3x+3$ **6.** a **7.** 1) {0, 3} 2) { $\log_3 2-1$, 2} 3) $\left\{\log_{\frac{2}{3}}\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$ 4) {0, $\log_3 2$ } **8.** 1) $a>1$ 2) $a>1$ **9.** 1) (−∞, 0)∪(1, +∞) 2) (0, 1) 3) $\left(-\infty,\ -\sqrt{\log_2 3}\right)\cup\left(0,\ \sqrt{\log_2 3}\right)$ 4) (−∞, 0)∪(2, +∞) **10.** 1) {2, 3} 2) {16} 3) {6} 4) {10^{-4}, 10} **11.** 1) {3} 2) {10^{-3}, 10, 100} 3) $\left\{\frac{1}{\sqrt{10}},\ \sqrt[3]{10}\right\}$ **14.** a>0 또는 $-10-4\sqrt{6}$ **15.** a를 빗변으로 하는 직3각형 **16.** $a\leq 1$, $a>\frac{13}{4}$일 때 풀이 ϕ, 1< $a\leq 3$, $a=\frac{13}{4}$일 때 풀이 1개, $3<a<\frac{13}{4}$일 때 풀이 2개 **17.** (−∞, 0.1)∪(100, 1000) 2) $0<a<1$일 때 (−5, −2), $a>1$일 때 (−∞, −5)∪(2, +∞)

제2장

1. 1) 38° 41′ 2) $5\sqrt{3}$ **4.** 1) 28° 57′, 46° 33′, 104° 30′ 2) 120°, 21° 47′, 38° 13′ 3) 36° 52′, 53° 8′, 90° **5.** 1) 3 2) $\frac{15}{2}\sqrt{3}$ 3) 10 **6.** 6.772(m) **7.** 8.845(m) **8.** 1) 1.72 2) 20.35 3) $2\sqrt{3}$ **9.** 1) 6 2) $4\sqrt{6}$ 3) $10\sqrt{3}$ **10.** 두 변사이각이 90°일 때 면적이 가장 크다. **12.** $\frac{1}{2}ab\sin\theta$ **13.** 1) A=139° 57′, b=161.71, c=43.5 2) a=125, B=73° 45′, C=44° 19′ 3) A=57° 38′, C=89° 59′, c=208.37 4) A=34° 56′, B=114° 13′, C=30° 51′ **14.** 208.73(m)

제3장

1. 1) $\frac{n-2}{n}\pi$ 또는 $\frac{n-2}{n}\times180^\circ$, $(n-2)\pi$ 또는 $(n-2)\times180^\circ$ 2) 25π 또는 4 500° **2.** 1) −0.5 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 4) 1 **3.** 1) 1 2) 1 **4.** $\alpha=\pi-2$ (라디안), $\left(\frac{\pi}{2}-1\right)r^2$ **5.** $\frac{\alpha}{2}\left(r'^2-r^2\right)$ **6.** $\frac{\sqrt{1-k^2}}{-k}$ **7.** $-\frac{7}{5}$ **9.** $\cos(\alpha+\beta)\approx0.23$, $\sin(\alpha+\beta)\approx-0.97$, $\cot(\alpha+\beta)\approx-0.23$ **11.** 1) $\left\{\frac{\pi}{3}, -\frac{2}{3}\pi\right\}$ 2) $\left\{2-\frac{4\pi}{3},\ 2-\frac{2}{3}\pi\right\}$ 3) $\left\{\frac{\pi}{3}\right\}$ **12.** 1) $\left\{\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi\right\}$ 2) $\left\{\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi\right\}$

제4장

1. 1) −1 2) 0 **2.** 1) $\left\{\frac{28}{25},\ \frac{41}{4}\right\}$ 2) $\left\{\frac{3(-a+b-46)}{2(a+b-5)},\ \frac{1}{4}(-a+b-46)\right\}$ 3) $\{(3,\ 2), (-3,\ -2)\}$ **3.** $\frac{2}{3}$, $\frac{\pi}{6}$ **4.** $-2+3i$ **5.** $G=\frac{z_1+z_2+z_3}{3}$ **6.** 1) $z=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ 2) $z_1=-1+3i,\ z_2=1+i$ **7.** 1) $\left\{\frac{-3\pm7i}{2}\right\}$ 2) $\{-5, 8i, -8i\}$ 3) $\left\{\pm\sqrt{2}i, \frac{1\pm3i}{3}\right\}$ **8.** $\left(3\sqrt{3}+\frac{3}{2}\right)+\left(3-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)i$ **9.** 1) $\sqrt{5}$ **11.** $\frac{5}{2}$ **14.** $2\cos n\theta$ **15.** $2\cos\frac{2n}{3}\pi$

$$=\begin{cases}2 & n=3k,\ k\in Z\\ -1 & n\neq3k,\ k\in Z\end{cases}$$

제 5 장

2. 0, 0, 0, 1 **3.** A={3, 5, 11, 13}, B={7, 11, 13, 19} **5.** ㄴ) **6.** 거꿀안명제

제6장

1. $a /\!/ \mathrm{AB}$, $b /\!/ \mathrm{AB}$ **2.** 1) 옳은 명제 4) 옳은 명제 **3. 1)** $a /\!/ b$ 또는 a와 b는 사귄다. 2) a와 b는 어긴다. **4.** $\frac{a}{2}\sin 2\theta \sin\varphi$ **5.** $a /\!/ \alpha$, $a /\!/ \beta$ **6.** 1) 말할수 있다. 2) 말할수 없다. 3) 말할수 있다. 4) 말할수 없다. **7.** 1) ① 평행 2) ② 3등분 **8.** $192+32\sqrt{6}$ **9.** $352\mathrm{cm}^2$ **10.** $5\sqrt{7}$ cm **11.** $8\mathrm{cm}^2$ **12.** 11cm **13.** 1) $\frac{a^2}{2}\tan\varphi$ 2) $a\mathrm{H}$ **14.** 1) $576\mathrm{cm}^2$, $1600\mathrm{cm}^2$ 2) 9.6cm **15.** 1) 바른제형 2) $\frac{3\sqrt{3}}{8}a^2$ **16.** 1 $000\mathrm{dm}^2$ **17.** $\frac{1}{2h}\left(\mathrm{S}+\sqrt{\frac{3(4\mathrm{V}h-\pi\mathrm{S}^2)}{\pi}}\right)$, $\frac{1}{2h}\left(\mathrm{S}-\sqrt{\frac{3(4\mathrm{V}h-\pi\mathrm{S}^2)}{\pi}}\right)$ **18.** $\frac{8}{17}r$ **19.** $2\left(\frac{r}{\mathrm{R}}\right)^2\left(1-\left(\frac{r}{\mathrm{R}}\right)^2\right)$

수 학(중학교 제5학년용)

집 필 교수 박사 서기영, 교수 박사 류해동, 부교수 남호석, 부교수 김희일,
김봉희, 김연희

심 사 심의위원회

편 집 리혜경 콤퓨터편성 홍경희

장 정 홍경희 교 정 리유미

낸 곳 교육도서출판사

인쇄소 평양영예군인교육도서인쇄공장

인 쇄 주체101(2012)년 3월 1일 발 행 주체101(2012)년 3월 10일

교－11－보－485 값 10 원